

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

COLAPSO SECUNDARIO AUTOSIMILAR CON MATERIA OSCURA Y FORMACION ESTELAR	<i>Urzagasti D.</i>	1
ESTUDIO DE LAS MICROPULSACIONES DE LA RADIACIÓN CÓSMICA EN EL LABORATORIO DE FISICA CÓSMICA DE CHACALTAYA A 5230 M.S.N.M.	<i>Ergueta V., Velarde A., Saavedra O.</i>	12
TRANSPORTE DE UN ELECTRÓN CRISTALINO POR EFECTO ACUMULADO DE LOCALIZACIONES ASINTÓTICAS	<i>Diego Sanjinés C.</i>	18
AJUSTE DEL PERFIL RADIAL DEL FLUJO DE RAYOS X PARA OBJETOS EN EL TRAPECIO DE ORION	<i>Urzagasti D.</i>	28
COLISIÓN DE DOS AGUJEROS NEGROS	<i>V. Subieta, J.A.C. Nogales</i>	33
PÉNDULO IMPULSADO	<i>Timotheo da Costa Pardal</i>	39
SEIS AÑOS DE MEDIDAS DE OZONO Y RADIACIÓN ULTRAVIOLETA EN LA PAZ, BOLIVIA	<i>Zaratti F., Forno R., Cuarita L. y Saavedra P.</i>	48
IMÁGENES ÓPTICAS DE LAS DISMINUCIONES DE PLASMA EN LA CRESTA DE LA ANOMALÍA ECUATORIAL	<i>H.S.S. Sinha, P. K. Rajesh, R. N. Misra, R. Pandey, N. Dutt, M. B. Dadhanía y S. B. Banerjee</i>	52

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

COLAPSO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR EN UN ESPACIO AUTO-SIMILAR	<i>M.J. Lucano, J.A.C. Nogales</i>	61
LA DESCRIPCIÓN DE UNA NUEVA ENTROPÍA	<i>Graham R., Tsallis C.</i>	70
EL REFRIGERADOR DE EINSTEIN Y SZILARD	<i>Sanjinés D., Nogales J.</i>	74

CONTENIDO

C. MEMORIAS DE LA REUNIÓN ANUAL DE DE LA SOBOFI U OTRAS REUNIONES DE FÍSICA

XV REUNIÓN NACIONAL DE FÍSICA COCHABAMBA - SEPTIEMBRE DE 2002 RESÚMENES DE LAS PONENCIAS

SOBOFI 79

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

CONSIDERACIÓN DEL PESO ESTADÍSTICO EN LA GENERACIÓN
DE INCERTIDUMBRES DE FUNCIONES REDUCIBLES A PRIMER
GRADO AJUSTADAS POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

*Wilton Pereira da Silva, Cleide M. D. P. S. e Silva, Diogo D. P. S. e
Silva y Cleiton D. P. S. e Silva* 81

LA MAGIA DE LA FÍSICA *Juaniquina E., Valdéz R., Ergueta V.* 88

8^{VA} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
Bustos R., Velarde A., Palenque E. 91

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física	Instituto de Investigaciones Físicas	Carrera de Física
Dr. Eduardo Palenque Vidaurre Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: ozono@mail.megalink.com Tel.: (591-2)2799155 Fax:(591-2)2792622	Lic. Alfonso Velarde Chávez Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622	Lic. Deterlino Urzagasti Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: urza@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Ramiro de La Reza Observatorio Nacional CNPq Rua General Bruce 586 20921-400 Rio de Janeiro-Brasil e-mail: delareza@danp6.on.br	Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira Instituto de Física Universidade Federal Fluminense C.P. 1002966, Niteroi, RJ-Brasil e-mail: pmco@regulus.if.uff.br
Dr. Juan C. Muzzio Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata La Plata-Argentina e-mail: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar	Dr. Carlos Navia Instituto de Física Universidade Federal Fluminense Av. Gen. Milton Tavares de Souza 24210-340, Niteroi, RJ-Brasil e-mail: gfcnoj@portela.if.uff.br
Dr. Oscar Antonio Rondón Institute of Nuclear and Particle Physics University of Virginia McCormick Road, Charlottesville, VA 22901 804 924-6787, USA e-mail: or@virginia.edu	Dr. Oscar Saavedra Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: saavedra@to.infn.it
Dr. Edison H. Shibuya Instituto de Fisica Gleb Wataghin Universidade Estadual de Campinas C.P. 6165, 13.083-970 Campinas, SP-Brasil e-mail: shibuya@ifi.unicamp.br	Dr. Guillermo G. Cabrera Instituto de Fisica Gleb Wataghin Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP e-mail: cabrera@ifi.unicamp.br
Dr. Newton Figueiredo Universidade Federal de Itajubá C.P.50-CEP:37500-903, Itajubá-MG-Brasil e-mail: newton@efei.br	Dr. Piero Galeotti Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: galeotti@to.infn.it
Dra. Patricia Tissera Instituto de Astronomía y Física del Espacio CONICET Buenos Aires-Argentina e-mail: patricia@iafe.uba.ar	Dr. Roberto Aquilano Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata La Plata-Argentina
Dr. Orlando L. G. Peres Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP Instituto de Fisica Gleb Wataghin Departamento de Raios Cosmicos CP 6165, 13083-970 Campinas SP Brasil e-mail: orlando@ifi.unicamp.br	Dr. Jaime Villas Rocha Departamento de Fisica Teorica Instituto de Fisica, UERJ Rua Sao Francisco Xavier, 524 20559-900 Maracana, Rio de Janeiro-Brasil e-mail: roch@dft.if.uerj.br

ISSN 1562-3823

También indexada en PERIODICA



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 9
OCTUBRE DE 2003

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

También indexada en PERIODICA

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia

Editores: Alfonso Velarde Ch., Eduardo Palenque V. y Deterlino Urzagasti.

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.
Tel: (591 2)2792999; FAX: (591 2)2792622.

Portada: Dos agujeros negros supermasivos en la misma galaxia. Imagen de NGC 6240 obtenida por Chandra en el espectro de Rayos X.

Tomada de <http://chandra.harvard.edu/photo/2002/0192/>

Crédito: NASA/CXC/MPE/S.Komossa et al.

IMPRESO EN BOLIVIA - PRINTED IN BOLIVIA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: ozono@mail.megalink.com

Tel.: (591-2)2799155

Fax: (591-2)2792622

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax: (591-2)2792622

Carrera de Física

Lic. Deterlino Urzagasti

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: urza@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax: (591-2)2792622

Objetivos

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

La RBF publica artículos, revisiones y colaboraciones en lengua castellana. Se reciben también artículos escritos en inglés, los que son traducidos al castellano por los editores para su publicación.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

Las colaboraciones enviadas para su publicación deberán estar escritas preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar su contribución preferentemente en formato LATEX. Para ello necesitarán el formato de la RBF especificado en los archivos *rbfi.cls* y *rbfi.tex*, los cuales, podrán ser enviados por correo electrónico o podrán ser obtenidos de la página de *internet* de la Carrera de Física de la U.M.S.A. (www.umsa.net.edu.bo/fisica/). En caso contrario, los autores podrán enviar su contribución en formato de texto (extensión *.txt*) ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. En cualquier caso, las figuras deberán ser enviadas preferentemente en formato *postscript* (extensiones *.ps* o *.eps*), o en su defecto en el formato con la extensión *.jpg*.

Las contribuciones, o cualquier consulta sobre la RBF, deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

COLAPSO SECUNDARIO AUTOSIMILAR CON MATERIA OSCURA Y FORMACION ESTELAR

Urzagasti D.

*Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz-Bolivia*

RESUMEN

Se estudian los efectos de la materia oscura y de los procesos de formación estelar en las soluciones esféricas del colapso secundario sobre una perturbación sobredensa inicial, la cual, así como todas las capas de masa colapsantes, se expande inicialmente en un universo de Einstein-De Sitter ($\Omega = 1$). Se trata con un gas colisional, cuyas capas de masa, luego de alcanzar su máximo radio de expansión, son alcanzadas por un choque que se propaga hacia fuera. La materia oscura es considerada como un fluido sin presión y la tasa de formación estelar es obtenida de un modelo de ley de potencias, encontrándose un buen acuerdo con la tasa de Salpeter. Se obtienen las variables de fluido antes y después del choque, así como su comportamiento en ley de potencias de la variable autosimilar cerca del origen.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo aborda el análisis de la modificación de las soluciones autosimilares (invariantes en forma y apariencia en el espacio-tiempo) de Bertschinger (1985) cuando se consideran los efectos de una componente de materia oscura y procesos de formación estelar para la acreción cosmológica con choque de un fluido colisional en un universo de Einstein-De Sitter.

Es bien conocido que el comportamiento de la densidad de masa en un colapso esférico secundario posterior al colapso inicial de una fluctuación positiva de la masa tendría la forma $\rho \propto r^{-2.25}$ (Gunn 1977; Deckel, Kowitt y Shaham 1981), siendo r la coordenada radial. Esta propuesta es luego verificada semianalíticamente por Bertschinger (1985), pero sólo considerando un fluido bariónico y politrópico.

Consideremos el proceso de expansión y posterior colapso cosmológico de una perturbación inicial esférica de la densidad $\delta\rho/\rho = \delta_i \ll 1$, al tiempo cósmico t_i e inmersa en un universo de Einstein-De Sitter ($\Omega = 1$). Siendo R_i el radio de la perturbación (con $R_i \gg \lambda_{Jeans}$, de manera que el fluido no tiene presión durante la expansión) y $v_i = H_i r$ el flujo de Hubble sin perturbar, el incremento de la densidad del material interior a R_i puede escribirse como

$$\rho = (1 + \delta(\tau))\rho_H, \quad \tau = \frac{t}{t_i}, \quad (1)$$

$$\rho_H = \frac{1}{6\pi G t^2},$$

donde ρ_H es la densidad de Einstein-De Sitter. En el régimen lineal (Peebles, 1993),

$$\delta(\tau) = \delta_i \left(\frac{3}{5} \tau^{2/3} + \frac{2}{5} \tau^{-1} \right), \quad (2)$$

produciéndose el paso al régimen no lineal cuando $\delta \approx 1$,

o bien cuando $\tau \approx \delta_i^{-3/2}$. En este punto, la materia inicialmente dentro de R_i deja de expandir y comienza a colapsar al tiempo $t_{ita} = \frac{3\pi}{4} \delta_i^{-3/2} t_i$ (tiempo inicial de retorno) correspondiente al radio de máxima expansión inicial $r_{ita} = R_i \delta_i^{-1}$. Fuera de r_{ita} , $\rho \rightarrow \rho_H$ a medida que $r \rightarrow \infty$. Posteriormente a este colapso inicial, las capas de masa, fuera de las capas sobredensas iniciales, alcanzan también su radio de retorno, el cual se incrementa con el tiempo según $t^{8/9}$, y realizan su colapso secundario.

Al tiempo cósmico $t = \tau t_i$ y al radio $r = y r_i$, el movimiento para los elementos de fluido con $r = r_i > R_i$ en $t = t_i$ obedece la segunda ley de Newton:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm(r_i)}{r^2},$$

$$m(r_i) = \frac{4}{3} \pi \rho_i r_i^3 (1 + \Delta), \quad (3)$$

$$\rho_i = \frac{1}{6\pi G t_i^2}, \quad \Delta \ll 1,$$

cuya segunda integración da como resultado la siguiente parametrización:

$$\tau = \frac{3}{4} (\theta - \sin \theta) \Delta^{-3/2}, \quad y \Delta = \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (4)$$

Al tiempo t , el retorno ocurre en $y = \Delta^{-1}$ ($\theta = \pi$) y corresponde al radio de retorno:

$$r_{ta}(t) = \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{-8/9} \delta_i^{1/3} R_i \tau^{8/9}, \quad (t \geq t_{ita}). \quad (5)$$

La trayectoria, entonces, es normalizada usando este radio:

$$L \equiv \frac{r}{r_{ta}(t)} = \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\pi} \right)^{-8/9} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (6)$$

Dado que el radio de retorno, como función del tiempo, es la única escala de longitud, el movimiento es autosimilar, esto es, invariante en forma y apariencia en el espacio-tiempo. $L = L(\theta(\tau))$, la única variable independiente, es univaluada (las capas no se cruzan), y su rango $0 \leq r, L < \infty$ se corresponde con el rango $2\pi \geq \theta > 0$. Con esta normalización, todas las partículas del fluido tienen la misma trayectoria adimensional.

2. COLAPSO SECUNDARIO CON CHOQUE

Si el fluido colapsante es colisional (disipativo), éste puede ser frenado por un choque que se propaga hacia fuera. En este caso, los elementos de fluido no se cruzan y si no hay un agujero negro central son desacelerados hasta llegar al reposo en el origen. Bertschinger analiza el caso de un flujo de postchoque de un gas politrópico. Ahora se busca estudiar los efectos de una componente no colisional (materia oscura) dominante de la masa y procesos de formación estelar en la componente bariónica (el gas).

De acuerdo a la autosimilaridad, el choque ocurre en $L = L_s \equiv r_s/r_{ta}(t)$ y se propaga de acuerdo a la ley $r_s(t) = L_s r_{ta}(t) \propto t^{8/9}$. Por otro lado, las variables del fluido pueden ser normalizadas de la siguiente manera:

a Velocidad:

$$v(r, t) = \frac{r_{ta}(t)}{t} V(L), \quad (7)$$

b Densidad:

$$\rho(r, t) = \rho_H(t) D(L), \quad (8)$$

c Masa:

$$m(r, t) = \frac{4}{3} \pi \rho_H(t) r_{ta}(t)^3 M(L), \quad (9)$$

d Presión gaseosa:

$$p(r, t) = \rho_H(t) \left(\frac{r_{ta}(t)}{t} \right)^2 P(L), \quad (10)$$

e Tasa por unidad de volumen de pérdida de masa por formación estelar:

$$s(r, t) = \frac{\rho_H(t)}{t} S(L), \quad (11)$$

Debe tenerse en cuenta aquí que la definición de L como función de θ en (6) es válida sólo para el régimen sin presión $L > L_s$ (prechoque) y en éste, las variables de fluido poseen las siguientes formas:

$$\begin{aligned} V(L) &= L(\theta) \frac{(\theta - \text{sen}\theta)\text{sen}\theta}{(1 - \cos\theta)^2}, \\ D(L) &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{(\theta - \text{sen}\theta)^2}{(1 + 3\chi)\text{sen}^6 \frac{\theta}{2}}, \chi = 1 - \frac{3}{2} V(L(\theta))/L(\theta), \\ M(L) &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 L(\theta)^3 \frac{(\theta - \text{sen}\theta)^2}{\text{sen}^6 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

El proceso de formación estelar es introducido en el postchoque, y en esta región, el gas convertido en estrellas pasa a ser parte de la componente oscura sin presión. No se consideran procesos de enfriamiento ni de rotación, y tampoco los efectos de campos magnéticos.

Para el caso de un flujo de postchoque con materia oscura y formación estelar, las ecuaciones del fluido colisional con simetría esférica: de continuidad, Euler, del flujo de energía y de la masa, son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) &= s, \\ \frac{\partial}{\partial t} v + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} v^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p + \frac{G(m+m_o)}{r^2} &= -\frac{v}{\rho} s, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho} + v \frac{\partial}{\partial r} \frac{p}{\rho} + \frac{2}{3} \frac{p}{\rho} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) &= -\frac{p}{\rho^2} s, \\ \frac{\partial m}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho, \end{aligned} \quad (13)$$

Aquí, y en lo que sigue, el subíndice 'o' denota la materia oscura, la cual, considerada como un fluido sin presión, tiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_o + \rho_o \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_o v_o) &= -s, \\ \frac{\partial}{\partial t} v_o + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} v_o^2 + \frac{G(m+m_o)}{r^2} &= \frac{v}{\rho} s, \\ \frac{\partial m_o}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho_o, \end{aligned} \quad (14)$$

Luego, las ecuaciones (13) y (14), normalizadas, toman las siguientes formas:

$$\begin{aligned} (V - \frac{8}{9}L)D' + DV' + \frac{2DV}{L} - 2D &= S, \\ (V - \frac{8}{9}L)V' - \frac{1}{9}V + \frac{P'}{D} + \frac{2}{9} \frac{(M+M_o)}{L^2} &= -\frac{V}{D}S, \\ (V - \frac{8}{9}L)(\frac{P'}{P} - \gamma \frac{D'}{D}) - \frac{2}{9} + \frac{4}{3} \frac{V}{L} + \frac{2}{3}V' &= -\frac{P}{D}S, \\ M' &= 3L^2D, \end{aligned} \quad (15)$$

y

$$\begin{aligned} (V_o - \frac{8}{9}L)D'_o + D_oV'_o + \frac{2D_oV_o}{L} - 2D_o &= -S, \\ (V_o - \frac{8}{9}L)V'_o - \frac{1}{9}V_o + \frac{2}{9} \frac{(M+M_o)}{L^2} &= \frac{V_o}{D_o}S, \\ M'_o &= 3L^2D_o. \end{aligned} \quad (16)$$

En todas ellas, las primas denotan derivadas respecto de L . Como se ve, los términos de pérdida de masa y momento del gas por formación estelar lo son de ganancia para la materia oscura, es decir, las estrellas recién formadas son consideradas sólo como partículas masivas que son agregadas al fluido no colisional.

Las condiciones iniciales se definen completamente dando el radio y la amplitud de la perturbación inicial,

R_i y δ_i . Siendo z_i el enrojecimiento al tiempo t_i , los radios de retorno mayores al radio inicial de retorno r_{ita} se dan para enrojecimientos z :

$$(z+1) \leq \left(\frac{4}{3\pi}\right)^{2/3} (1+z_i)\delta_i = (z_{ita}+1), \quad t \geq t_{ita}. \quad (17)$$

En este punto es conveniente introducir un parámetro adimensional en el cual todos los parámetros iniciales del modelo queden contemplados; éste es:

$$F_i = \left[\frac{(M_i/10^{10}M_\odot)(1+z_i)}{h^2(\delta_i^{-1}+1)} \right]^{1/3}, \quad (18)$$

donde h es la constante de Hubble en unidades de 100 km/seg/Mpc y M_i es la masa interior a R_i , el cual, entonces, queda expresado como:

$$R_i = 205 F_i \delta_i^{-1/3} (1+z_i)^{-4/3} \text{ kpc}. \quad (19)$$

Una relación adicional puede utilizarse, aquella que vincula δ_i con z_i a través del parámetro de sesgo b (Peebles 1993):

$$\delta_i = \frac{25}{b(1+z_i)}, \quad b = 1-3. \quad (20)$$

Las ecuaciones de continuidad de la masa en (15) y (16) proveen una integral analítica:

$$L^2 \left[\left(V - \frac{8}{9}L \right) D + \left(V_o - \frac{8}{9}L \right) D_o \right] + \frac{2}{9} (M + M_o) = 0, \quad (21)$$

que constituye la condición para que las capas de masa no se crucen (velocidades siempre negativas). Posteriormente (21) es usada en la verificación de la precisión de las soluciones obtenidas en forma numérica.

Dado que la materia oscura no tiene presión, no es chocada, y en el prechoque del gas ($L > L_s$) toda la materia es oscura. Es justo en el choque ($L = L_s$) que se da la distinción entre las componentes bariónica y oscura. Entonces, las condiciones del prechoque son dadas por las funciones (12) valuadas en L_s : las velocidades normalizadas de ambas componentes son iguales pero la masa y densidad normalizadas son multiplicadas por un factor ' a ' para la componente bariónica y por un factor ' b ' para la componente oscura a fin de exigir que un 90% de la masa justo antes del choque sea materia oscura, cuando ésta está presente. Las condiciones iniciales de la componente oscura para una integración numérica hacia $L = 0$ son las condiciones del prechoque que se acaban de mencionar, mientras que las del gas son las de su postchoque, es decir, aquellas que resultan del salto de las variables hidrodinámicas del gas al ser chocado. Las condiciones de este postchoque gaseoso se obtienen integrando (15) en la región de transición del choque $\Delta L \rightarrow 0$, dando los resultados:

$$(V_2 - \frac{8}{9}L_s)D_2 = (V_1 - \frac{8}{9}L_s)aD_1$$

$$P_2 + D_2(V_2 - \frac{8}{9}L_s)^2 = aD_1(V_1 - \frac{8}{9}L_s)^2$$

$$(V_2 - \frac{8}{9}L_s)[5P_2 + D_2(V_2 - \frac{8}{9}L_s)^2] = aD_1(V_1 - \frac{8}{9}L_s)^3, \quad (22)$$

$$M_2 = aM_1.$$

donde el subíndice (2) denota al postchoque y el (1) al prechoque.

Escribiendo L en términos del radio y tiempo de retorno:

$$L = \frac{r}{r_{ta}(t_{ta})} \left(\frac{t}{t_{ta}} \right)^{-8/9}, \quad (23)$$

La ecuación de la trayectoria toma la forma:

$$\frac{d \ln T}{dL} = 1/(V(L) - 8L/9), \quad R = \frac{r}{r_{ta}(t_{ta})}, \quad T = \frac{t}{t_{ta}}. \quad (24)$$

La obtención de la trayectoria no es necesaria pero brinda una mejor visualización del proceso de expansión inicial y colapso posterior.

En este modelo se exige que las capas de fluido nunca se crucen, pudiendo darse la posibilidad de formación de un agujero negro central por acreción. En principio se exige la condición $V = 0$ en $L = 0$, la cual es satisfecha por la mayoría de los modelos que serán presentados más adelante.

En el caso de un fluido politrópico de índice $\gamma = 5/3$, el comportamiento de las variables a medida que $L \rightarrow 0$ sigue una ley de potencias. El análisis dimensional de este comportamiento indica que, para este fluido, se puede escribir:

$$D = L^{-9/4} \tilde{D}, \quad P = L^{-5/2} \tilde{P}, \quad M = L^{3/4} \tilde{M}, \quad (25)$$

siendo $\tilde{D}$, $\tilde{P}$, y $\tilde{M}$, finitas en el origen. El perfil $D \propto L^{-9/4}$ es el predicho por Gott (1975) y Gunn (1977) (Bertschinger 1985). Las soluciones obtenidas en esta oportunidad no siguen este escalamiento, pero si la forma de ley de potencias cerca de $L = 0$.

3. TASA DE FORMACIÓN ESTELAR

La tasa de formación estelar se obtiene adoptando un modelo en ley de potencias para la densidad de masa como función de la escala espacial: $\rho \propto \ell^{-\eta}$. Escribiendo el escalamiento en términos de la masa, m , correspondiente a la escala ℓ , con un factor de proporcionalidad dependiente sólo de la temperatura, T : $\rho = \Gamma(T)m^{\eta/(\eta-3)}$, y proponiendo como modelo que a la escala ℓ sólo una estrella de masa M_* se forma a partir de la masa m , siendo M_* una fracción $f \propto M_*^{-p}$ de m , se obtiene un escalamiento con la masa estelar de la forma $\rho \propto M_*^p \rho_M$, donde $\rho_M \propto M_*^{1-x}$ es la forma de Salpeter para la densidad de masa de estrellas de masa M_* y $p = (1-\eta/3)x-1$.

TABLA 1
PARÁMETROS DE LOS MODELOS ($L_0 = 10^{-5.273}$).

Parámetro	1	2	3	4	5	6
γ	5/3	-	-	-	-	-
a	1	0.1	1	1	0.1	0.1
b	0	0.9	0	0	0.9	0.9
$\log(g)$	$-\infty$	$-\infty$	-2.04680	-0.78792	-14.04932	-0.78792
L_s	0.33898	0.29444	0.34247	0.38711	0.29444	0.31564
θ_s	4.58324465	4.71072128	4.57352479	4.45250197	4.71072128	4.64916902
V_1	-1.47080	-1.67584	-1.45612	-1.28312	-1.67584	-1.57378
D_1	4.13353	4.93112	4.08160	3.51757	4.93112	4.51696
M_1	3.78759	3.72730	3.79259	3.85994	3.72730	3.75522
$\log(-V(L_0))$	-12.51236	-14.17016	-14.04890	0.57033	-14.41016	-14.00042
$\tilde{D}(L_0)$	2.60171	6.11611	7.15590	0.00055	6.11611	1.85321
$\tilde{P}(L_0)$	2.40670	9776.94321	1775.66452	0.89320	9776.94325	3083.92552
$\tilde{M}(L_0)$	10.40676	24.46440	4500.33010	20225.71670	24.46440	909.81296
$\beta(V)$	2.13	1.16	1.09	-0.4971	1.16	1.14
$\alpha(V)$	0.2	0.4	0.1	-2.053	0.4	0.3
$\beta(V_o)$	-	-0.49881	-	-	-0.49881	-0.49969
$\alpha(V_o)$	-	0.0791	-	-	0.0791	0.08099
$\beta(D)$	-2.25014	-2.603	-2.500	-1.5031	-2.603	-2.560
$\alpha(D)$	0.41459	-1.18	-0.58	0.682	-1.18	-1.45
$\beta(D_o)$	-	-1.50119	-	-	-1.50119	-1.50034
$\alpha(D_o)$	-	-0.2344	-	-	-0.2344	-0.22348
$\beta(M)$	0.749940	0.448	0.015	1.3×10^{-5}	0.448	0.016
$\alpha(M)$	1.01704	-0.15	-0.230	0.350991	-0.15	-0.918
$\beta(M_o)$	-	8×10^{-7}	-	-	8×10^{-7}	9×10^{-7}
$\alpha(M_o)$	-	0.4978601	-	-	0.4978601	0.4972693
$\beta(P)$	-2.50034	-3.592	-3.46	-2.5048	-3.592	-3.547
$\alpha(P)$	0.3798	-1.84	-1.94	-0.071	-1.84	-2.11
$\beta(R)$	-7×10^{-5}	-0.60	-0.519	-2900	-0.60	-0.57
$\alpha(R)$	-0.36352	-0.24	0.58	3700	-0.24	-0.02
$R(L_o)$	~ 0.4	~ 0.006	~ 0.03	$\sim 9 \times 10^{-5}$	~ 0.006	~ 0.01
$T(L_o)$	$\sim 3 \times 10^5$	$\sim 2.5 \times 10^3$	$\sim 1.5 \times 10^4$	~ 19	$\sim 2.5 \times 10^3$	$\sim 4 \times 10^3$

Igualando m a la expresión para la masa crítica de Jeans: $M_J = (\pi RT / \mu G)^{3/2} \rho^{-1/2}$ (R es la constante de los gases, μ el peso molecular medio y G la constante de gravitación) se obtiene $\eta = 2$ y la siguiente expresión para la densidad de masa en estrellas formadas:

$$\rho_* = \frac{x M_{*i}}{x-1} \left[\frac{2\mu G}{3\pi R} \frac{\rho}{T} \right]^{3/2} \quad (26)$$

donde M_{*i} es la masa estelar mínima en el proceso de formación.

A fin de verificar su validéz, el modelo es comparado con la tasa de Salpeter, obtenida de las observaciones en nuestra galaxia (Shapiro, 1983):

$$\chi \simeq -\frac{2x10^{-12}M_\odot}{x-1} \left(\frac{M_{*i}}{M_\odot} \right)^{1-x}, \quad x = 1.35, \quad (27)$$

dada en masas solares por año y por pc^3 . Siendo $t_G = 12 \times 10^9 años$ la edad de la galaxia, tal comparación toma la forma:

$$\frac{s}{\chi} = \frac{\rho_*/t_G}{\chi} = 10^{-5} \left(\frac{M_{*i}}{M_\odot} \right)^{1.35} [n/T]^{3/2} \quad (28)$$

donde n es la densidad en número de partículas (en cm^{-3}) y T la temperatura en grados Kelvin. Tomando $T \sim 10K$ y $n \sim 10^5 cm^{-3}$, típicas de la fase isotérmica en el proceso de formación estelar, y $M_{*i} \sim 0.1M_\odot$, también un valor muy usado, se tiene $\frac{s}{\chi} \sim 1$, indicando que el modelo planteado es razonable.

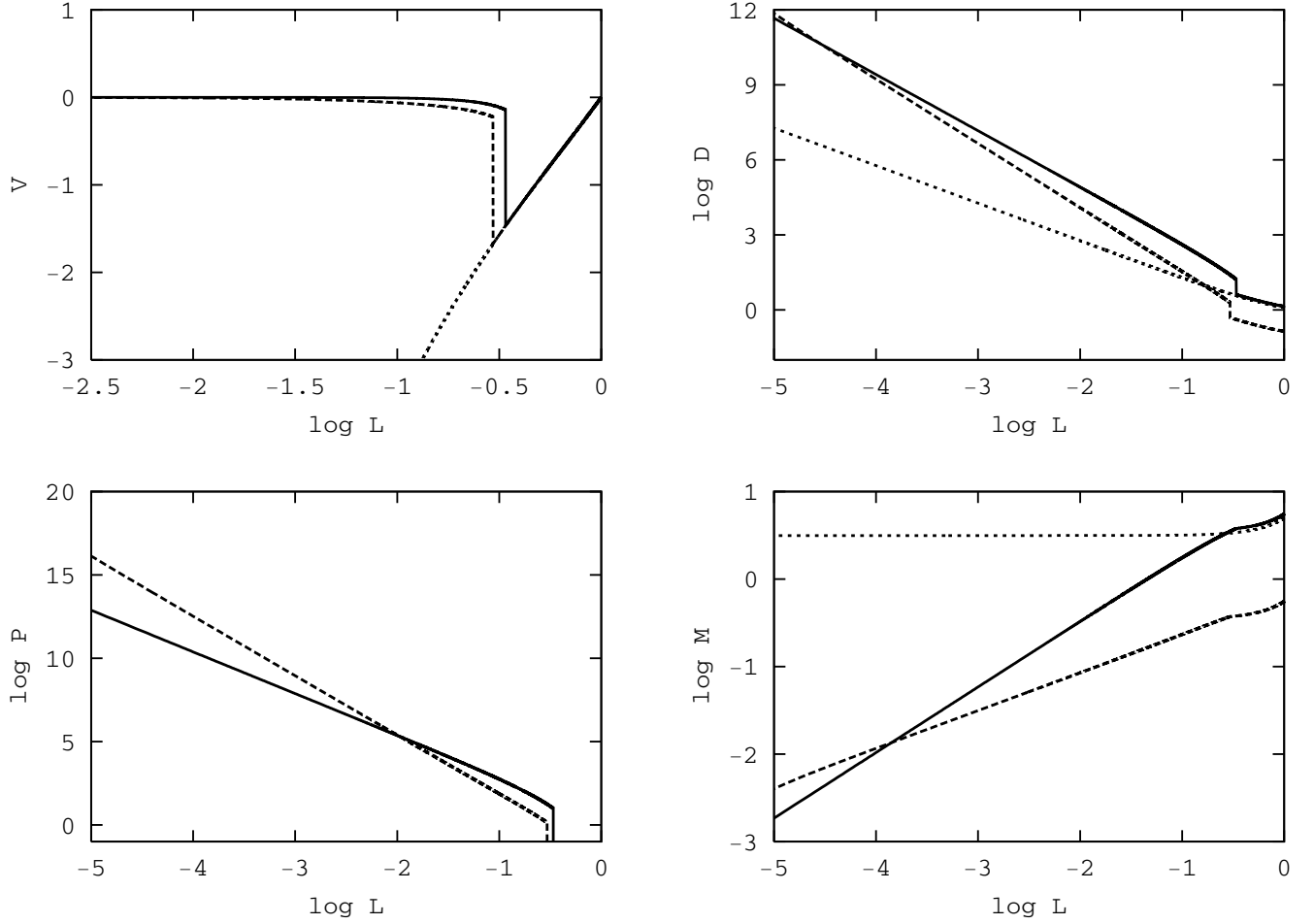


Figura 1. Soluciones para el colapso autosimilar (Modelo 2) de un fluido con gas (línea de segmentos grandes) y materia oscura (línea de segmentos pequeños) junto con las del fluido politrópico (Modelo1) de índice $\gamma = 5/3$ (línea sólida).

Siendo t el tiempo de universo presentado en la introducción, proponemos adicionalmente $s = -d\rho_*/dt = -\rho_*/t$, y normalizando las variables obtenemos la siguiente forma para la tasa normalizada de formación estelar por unidad de volumen:

$$S = -g(z)[D/P^{1/2}]^3, \quad (29)$$

$$g(z) = \frac{3x}{x-1} \frac{M_{*i}}{10^{11} M_\odot} \frac{1+z}{F_i^3 h^2}.$$

Entonces, el cociente entre la tasa (29) y la tasa de Salpeter toma la siguiente forma:

$$S/X = -2 \times 10^{-5} h^3 (1+z)^{9/2} (x-1) \left(\frac{M_{*i}}{M_\odot}\right)^{x-1} S. \quad (30)$$

En estas últimas se deja explícito el exponente x de la forma de Salpeter, pero para los cálculos necesarios se toma su valor observacional $x = 1.35$.

4. RESULTADOS

La integración fue realizada partiendo de los valores iniciales provistos por el salto en el choque en L_s y hacia

el interior de éste. Para cumplir con la condición $V \rightarrow 0$ para $L \rightarrow 0$ se realizan varias integraciones hasta encontrar el autovalor $L_s = L(\theta_s)$ que cumpla con la misma dentro del margen de error exigido. Se ha usado el algoritmo integrador Runge-Kutta de quinto orden, con un error relativo de 10^{-9} para cada paso de integración, siendo 3000 el número de pasos equidistantes tomados desde L_s hasta $L_0 = 10^{-5.273}$. Adicionalmente, la precisión de los resultados es corroborada con la integral analítica (21), la cual es satisfecha con un error relativo menor que $\simeq 10^{-7}$. No se integra hasta $L = 0$, debido a que las ecuaciones se hacen muy inestables a medida que $(V - \frac{8}{9}L) \rightarrow 0$; sin embargo, es de esperar que las pendientes de las soluciones cerca de $L = 0$ son las correctas.

Luego de variar los parámetros, se eligieron aquellos modelos que presentaban significativas diferencias. Son cinco modelos cuyos parámetros se muestran en la Tabla 1. Adicionalmente se presentan los parámetros del modelo estándar (modelo 1) de un fluido politrópico de índice $\gamma = 5/3$, sin materia oscura ni formación estelar, y cuyos resultados son discutidos en trabajos an-

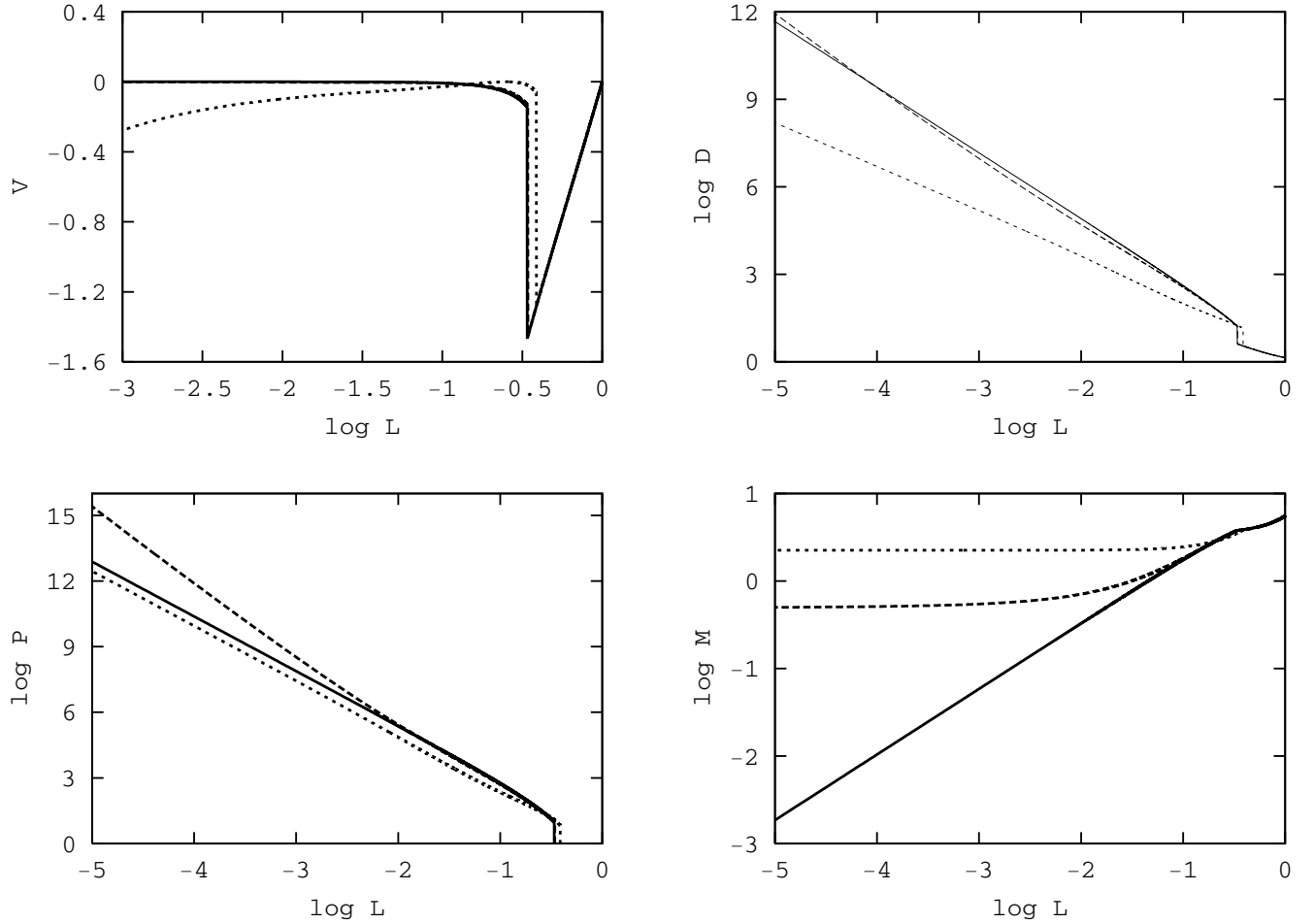


Figura 2. Soluciones para el colapso autosimilar de un fluido bariónico con formación estelar: Modelo 3 (línea de segmentos grandes) y Modelo 4 (línea de segmentos pequeños), junto con las del fluido politrópico (Modelo1) de índice $\gamma = 5/3$ (línea sólida).

teriores (Bertschinger 1985, Urzagasti 2001). En todos los modelos, excepto el modelo 4, se cumple la condición $V \rightarrow 0$ para $L \rightarrow 0$; sin embargo, el autovalor L_s del modelo 4 es único. En la Tabla 1 se presenta el escalamiento en ley de potencias de la forma $A = 10^\alpha L^\beta$ para $L \rightarrow 0$, donde A es cualquiera de las variables de fluido, ya sea gaseoso o de materia oscura. En el caso de las velocidades se usa $A = -V, -V_o$. Se presenta también el escalamiento para la trayectoria del gas con la forma $R = 10^\alpha T^\beta$. Los exponentes α y β fueron encontrados realizando un ajuste con los últimos cien puntos de integración (aproximadamente desde $L = 10^{-3.3}$ hasta L_0), y los valores presentados en la tabla tienen errores del orden de la unidad en las últimas cifras.

La Figura 1 presenta los resultados para el fluido con gas y materia oscura comparados a los del fluido gaseoso de índice politrópico $\gamma = 5/3$ (Modelo 1). En este caso, la presencia de la materia oscura (con un 90% de la masa) no impide que la velocidad de las partículas se haga cero en el origen. El choque se retrasa algo respecto del Modelo 1. Aunque la densidad de la materia os-

cura aumenta hacia el origen, la del gas lo hace más rápidamente llegando a alcanzar y superar la densidad del Modelo 1. También la presión en el Modelo 2 tiene una pendiente mayor a la del Modelo 1 y llega a sobrepasarla. La masa de la materia oscura presenta un valor más o menos constante en el colapso, ya sea para todo radio, desde el origen hasta el choque, como para todo tiempo posterior al choque; y por el contrario, la masa del gas decae hacia el origen, pero más lentamente que el gas del Modelo 1. La densidad del gas es inicialmente menor en un orden de magnitud que la de la materia oscura, pero luego de que el gas es chocado empieza a crecer hacia el origen, superando rápidamente la densidad de la componente oscura y llegando a ser hasta seis órdenes de magnitud mayor que ella. Esta es la imagen presente en objetos galácticos, en los que se tiene una componente gaseosa más densa y concentrada hacia el centro y una componente de materia oscura de menor densidad y distribuida más uniformemente formando un halo. La masa de la materia oscura, que tiende a un valor no nulo cerca del origen, nos indica la presencia

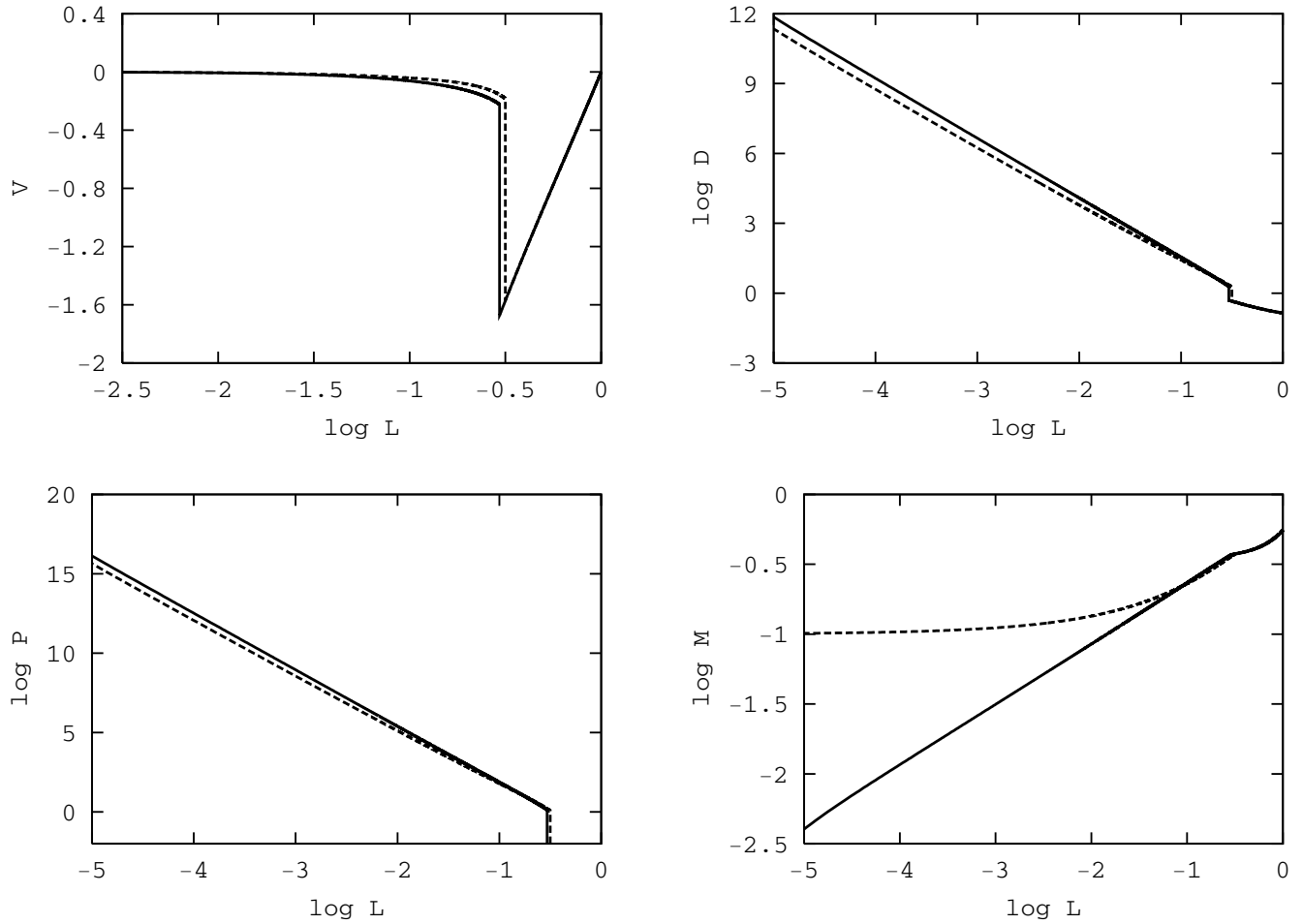


Figura 3. Soluciones para el colapso autosimilar de un fluido con gas, materia oscura y formación estelar: Componentes gaseosa del Modelo 5 (línea sólida) y del Modelo 6 (línea de segmentos). No se compara con el fluido politrópico de índice $\gamma = 5/3$ (Modelo1) pues en estos modelos la componente gaseosa constituye sólo el 10% de la masa.

de un agujero negro central. La materia que es acretada hacia esta singularidad es mayormente de la componente oscura y el gas se desenvuelve casi independientemente de ella; más bien, el comportamiento del gas se asemeja al de un fluido con un índice politrópico menor que $\gamma = 5/3$ (Urzagasti 2001). En la Figura 5(a) se presentan las trayectorias de los fluidos. Se ve que el gas del Modelo 2 sigue una trayectoria que lentamente se va acercando al origen, pero más rápidamente que el gas del Modelo 1. La trayectoria de la materia oscura sigue un camino independiente del gas, básicamente es la de un flujo de Hubble sin perturbar seguido de un colapso con acreción hacia un agujero negro central, singularidad que, a diferencia del gas, es alcanzada rápidamente.

Los resultados para un fluido con formación estelar y sin materia oscura son presentados en la Figura 2 (modelos 3 y 4). Estos son comparados también con los del Modelo 1. El choque resulta adelantado respecto del Modelo 1. Para el Modelo 3, en el que el efecto de la formación estelar es menor que en el Modelo 4 (pues tiene un menor valor de $\log(g)$), el gas es detenido al

acercarse al origen y su densidad no difiere mucho de la del Modelo 1. Por el contrario, en el Modelo 4, el gas colapsa con velocidades cada vez mayores hacia el origen y su compresión es menor en varios órdenes de magnitud respecto del Modelo 3. La presión hacia el origen es mayor en el Modelo 3 respecto de los otros modelos. La característica notable de la introducción de la formación estelar es que la masa decrece muy lentamente hacia el origen, sobretudo en el Modelo 4 donde este efecto es mayor, indicando un proceso de acreción hacia un objeto masivo central. La diferencia entre los modelos 3 y 4 se encuentra en el valor de la masa del sistema colapsante, pero en ambos casos esta masa es del orden de una masa solar o menor si es que el parámetro de sesgo es del orden de la unidad. Masas mayores son permitidas mientras mayor sea el valor de este parámetro. La situación para el caso de un colapso galáctico da una tasa de formación muy baja. Este caso es analizado en el Modelo 5. La Figura 5(b) muestra las trayectorias para los modelos 3 y 4. La trayectoria en el Modelo 3 es similar a la del Modelo 2, mientras que la del Modelo 4

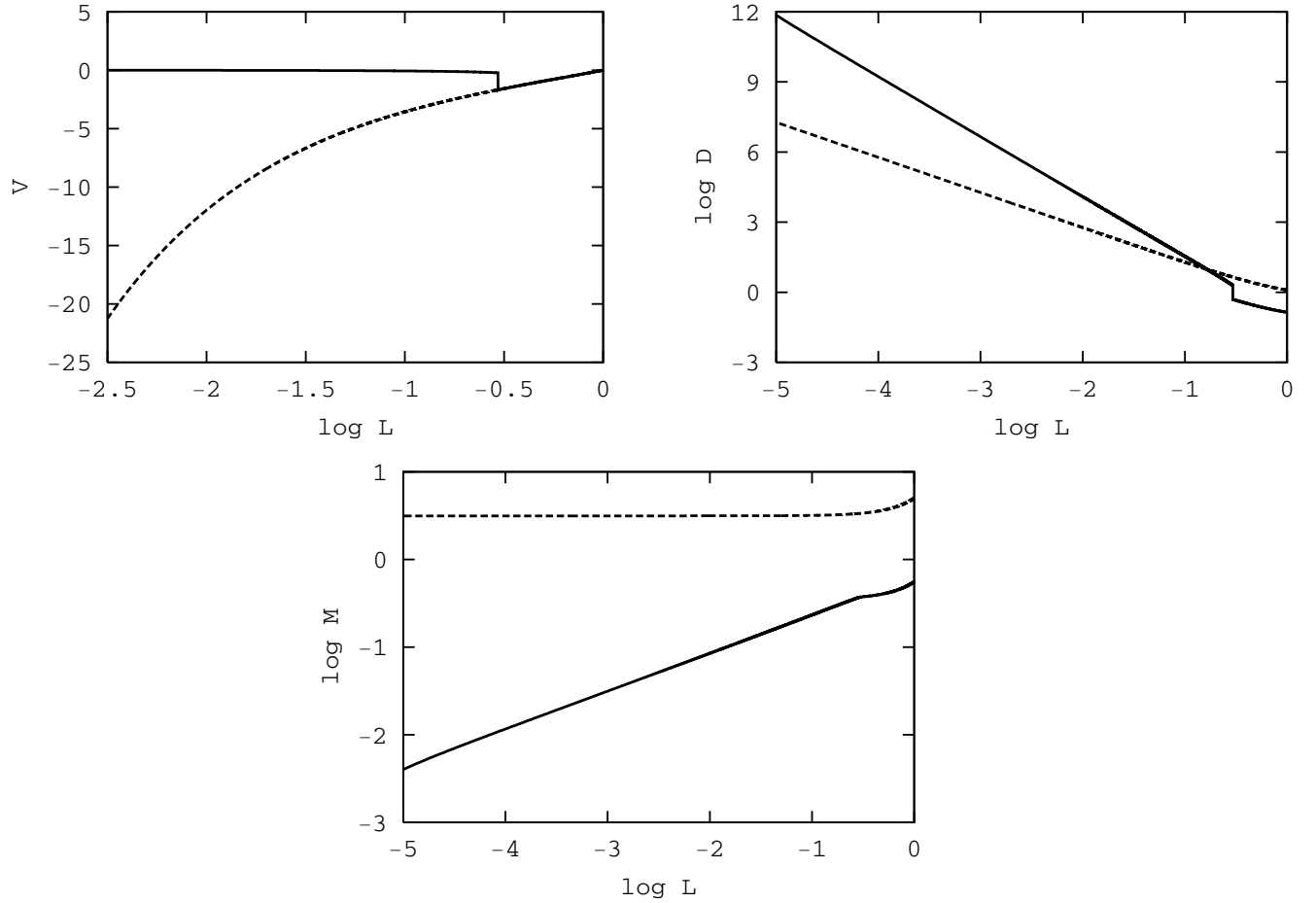


Figura 4. Soluciones para el colapso autosimilar de un fluido con gas, materia oscura y formación estelar (Modelo 5): Componentes gaseosa (línea sólida); componente de materia oscura (línea de segmentos). El comportamiento de la materia oscura en el Modelo 6 es similar al de este modelo.

sufre una rápida caída hacia la singularidad (ver Tabla 1). En los modelos 5 y 6 se consideran tanto la presencia de materia oscura como el efecto de la formación estelar. Sus resultados son mostrados en las figuras 3 y 4. El bajo valor de $\log(g)$ en el Modelo 5 indica que éste es adecuado para describir el colapso de objetos galácticos ($\sim 10^{12} M_{\odot}$), mientras que el Modelo 6 tiene el mismo valor de g que el del Modelo 4, y en este caso, para considerarlo aplicable a grandes valores de la masa colapsante, es necesario tomar igualmente grandes valores del parámetro de sesgo, es decir, considerar muy bajas fluctuaciones de la densidad en la escala espacial que ocupa esa masa en tiempos anteriores al tiempo inicial de retorno. Al examinar la Tabla 1 se ve que el Modelo 5 es casi idéntico al Modelo 2, sólo pequeñas diferencias en los valores de la velocidad y de la presión los distinguen, indicando que, al menos en este modelo de colapso autosimilar esférico, el efecto de la formación estelar no sería decisivo en el estudio del colapso para la formación de galaxias. A diferencia del Modelo 4, en el Modelo 6 la componente gaseosa es detenida cerca del origen y así sucede con el gas del Modelo 5. Tanto den-

sidad del gas como presión en los modelos 5 y 6 tienen un comportamiento muy similar, teniéndose valores algo menores para el Modelo 6. La diferencia aparece en la masa gaseosa de estos modelos: en el Modelo 5 la masa del gas decae monótonamente hacia el origen, mientras que en el Modelo 6 lo hace más lentamente, más bien indicando un proceso de acreción hacia un centro masivo. En la Figura 4 se compara el comportamiento de las variables del gas y de la materia oscura del Modelo 5. En este modelo, luego de observar las curvas de masa, densidad y velocidad, nuevamente se tienen los indicadores de la presencia de un halo galáctico de materia oscura, con una mayor concentración del gas hacia el centro y con la acreción de materia oscura hacia un agujero negro central. En la Figura 5(c) se comparan las trayectorias con la del Modelo 1. Ellas muestran que el gas colapsa muy lentamente hacia la singularidad, siendo el gas del Modelo 6 el que lo hace un poco más rápido (ver Tabla 1). El comportamiento de la materia oscura en ambos modelos, 5 y 6, es similar; se trata de un flujo inicial de Hubble seguido de un colapso hacia un agujero negro en un tiempo relativamente corto, dos veces el tiempo de

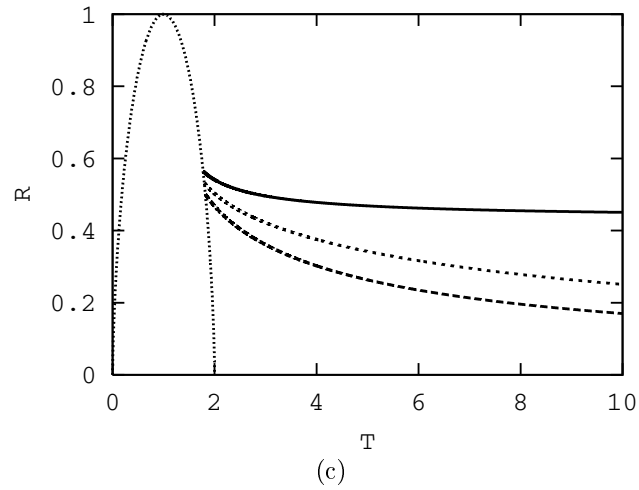
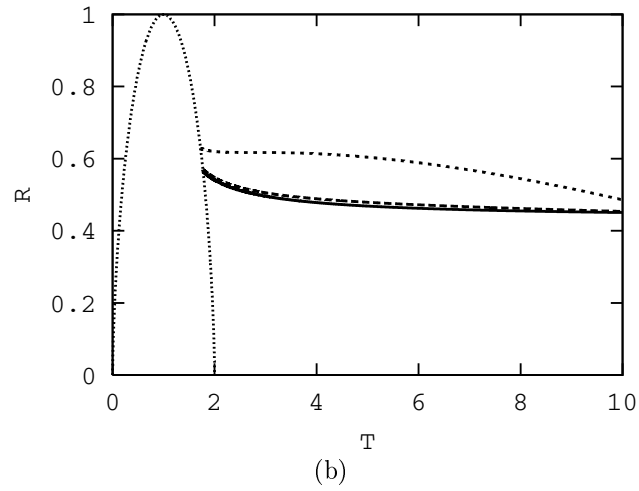
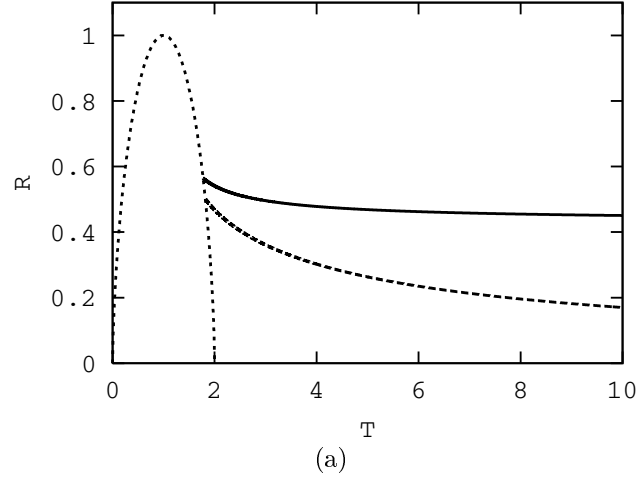


Figura 5. Trayectorias en el colapso autosimilar. El fluido politrópico de índice $\gamma = 5/3$ (Modelo1) se representa con la línea sólida. La línea de puntos representa el flujo sin perturbar de Hubble y cuando está presente la materia oscura, su comportamiento después del choque gaseoso sigue el colapso hacia un agujero negro central. (a) Modelo 2: gas (línea de segmentos grandes). (b) Modelo 3: gas (línea de segmentos grandes); Modelo 4: gas (línea de segmentos pequeños). (c) Modelo 5: gas (línea de segmentos grandes); Modelo 6: gas (línea de segmentos pequeños).

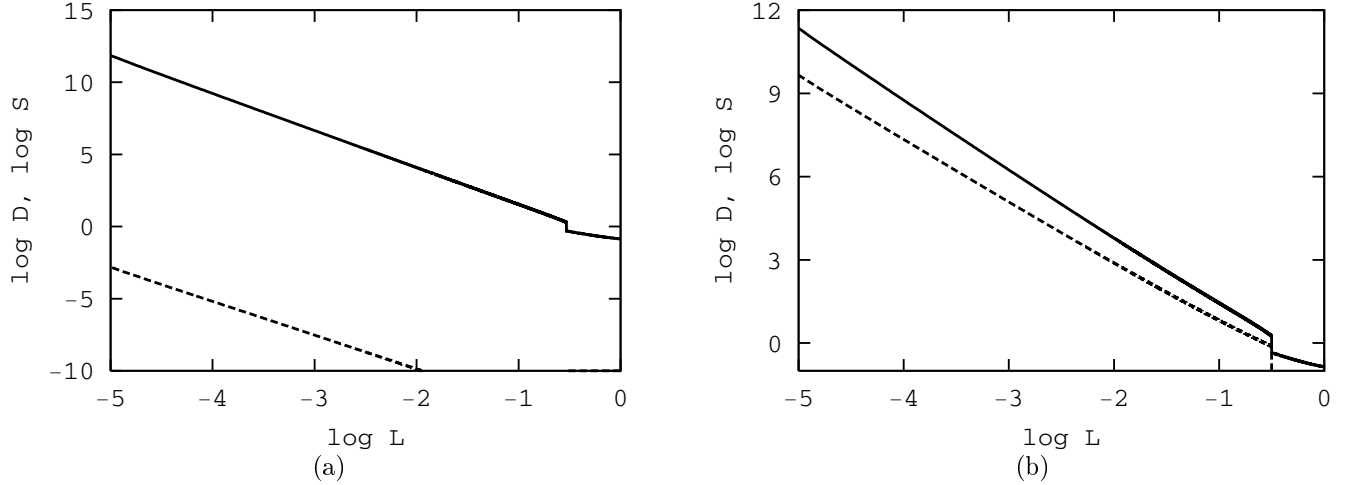


Figura 6. Tasas de formación estelar normalizadas (línea de segmentos) comparadas con la densidad (línea sólida). (a) Modelo 5; (b) Modelo 6.

retorno. En la Figura 6 se compara la tasa normalizada de formación estelar con la densidad. En el Modelo 5, la tasa de formación es varios órdenes de magnitud menor que la densidad y su efecto podría despreciarse, no sucediendo así en el Modelo 6, donde su importancia aumenta con la escala L . Finalmente, la Figura 7 muestra el cociente entre la tasa de formación estelar obtenida con nuestro modelo y la de Salpeter. Ella muestra que en el Modelo 5 es despreciable el efecto de la formación estelar, al menos hasta $L = L_o$, mientras que no lo es en el Modelo 6, donde a medida que se avanza hacia el interior se supera la tasa de Salpeter.

El resultado aquí obtenido, que muestra una ineficiencia de la formación estelar para procesos de formación galáctica con parámetros de sesgo del orden de la unidad, puede ser consecuencia de que en el modelo no se consideran las inhomogeneidades locales en la masa mientras el colapso avanza. Estas irregularidades son suavizadas de manera que la masa crítica de Jeans no es alcanzada localmente. Sin embargo, el problema puede resolverse artificialmente aumentando el parámetro de sesgo de manera que las fluctuaciones δ_i de la densidad se hagan lo suficientemente pequeñas a un dado enrojecimiento z_i y así se puedan considerar mayores valores de la masa del objeto colapsante sin disminuir el valor del parámetro g . Un proceso como éste daría resultados como los del Modelo 6.

5. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Se han modificado las ecuaciones del colapso secundario autosimilar y esférico de un fluido colisional con choque para incluir los efectos de una componente de materia oscura y procesos de formación estelar. En lo que respecta a la materia oscura, se la considera como un fluido no colisional (sin presión) que domina totalmente la materia hasta que el gas es chocado por una onda que se propaga hacia fuera del origen, y desde ese momen-

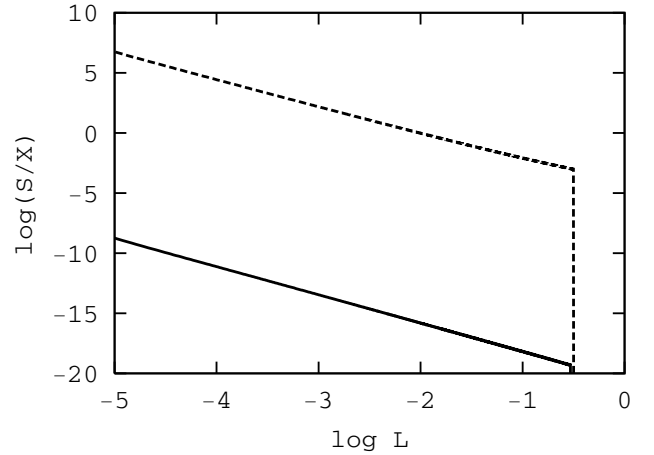


Figura 7. Comparación de la tasa normalizada de formación estelar del modelo con la de Salpeter. Modelo 5: línea sólida; Modelo 6: línea de segmentos. En ambos casos $h = 0.72$, $z = (z_{ita})|_{b=3}$, $M_{*i} = 0.1M_{\odot}$ y $x = 1.35$.

to, se lo distingue del gas bariónico, el cual representa el 10% de la masa. Para la formación estelar se modela una tasa, la cual es comparada con la tasa observacional estándar de Salpeter, consiguiendo un buen acuerdo con ésta. Como primer caso se analiza el efecto de la materia oscura solamente. La presencia de esta componente tiene un efecto en el gas muy similar a aquél de disminuir el índice politrópico en las soluciones estándar de una gas colisional de Bertschinger (1985): la velocidad del gas llega a cero en el origen pero las densidades y presiones aumentan hacia éste. La masa del gas tiende a cero hacia el origen pero la de la materia oscura disminuye muy lentamente indicando la presencia de un agujero negro central hacia el cual se acreta materia, principalmente

oscura. La densidad de materia oscura aumenta hacia el interior del sistema colapsante, pero no tanto como la densidad del gas y su valor se hace cada vez mucho menor que el de la densidad del gas a medida que se avanza hacia el origen. Entonces se tiene la imagen de un proceso de formación galáctica en el que el gas está mucho más concentrado hacia el centro y rodeado de un halo poco denso de materia oscura. Básicamente la materia oscura no es afectada por el gas, sigue inicialmente un flujo sin perturbar de Hubble y luego sufre un colapso de acreción fría hacia un agujero negro en un tiempo que es el doble del tiempo de retorno. Por su lado, la trayectoria de una partícula de prueba del gas se aproxima muy lentamente hacia la singularidad, manteniendo prácticamente un radio fijo luego de miles de veces el tiempo de retorno.

Cuando se considera un fluido sólo con efectos de formación estelar, pero con la condición de que la masa en estrellas pase a formar parte de la componente de fluido sin presión, inicialmente nula, y que posteriormente tiene un efecto gravitatorio sobre el gas, se tiene una situación en la que efecto de formación estelar es apreciable sólo si la masa del objeto colapsante es del orden de una masa solar (o menor), si es que el parámetro de sesgo es del orden de la unidad; sin embargo, aumentando el valor de éste parámetro, lo cual es equivalente a considerar muy bajas fluctuaciones en la densidad anteriores al tiempo de retorno, el modelo es aplicable a masas colapsantes mayores. El efecto de considerar menores valores para estas fluctuaciones origina un aumento de la tasa de formación estelar, como consecuencia, la trayectoria de una partícula de prueba alcanza rápidamente el origen con velocidades de colapso crecientes. El sistema tiene una menor compresión (menor densidad) respecto del modelo estándar y la masa contenida dentro de un volumen esférico colapsante decrece muy lentamente a medida que se disminuye su radio, tendiendo a un valor finito cerca del origen e indicando la presencia de un objeto central masivo que acreta el gas. Es cuando en este

último modelo se introduce materia oscura (con un 90% de la masa) que se obtienen diferencias importantes: el gas se detiene cerca del origen, la densidad y presión son algo similares a las del gas cuando no hay formación estelar pero si materia oscura, y a diferencia de este último caso, en el que la masa contenida en distintos radios decrece tendiendo a cero a medida que esos radios decrecen, dicha masa aún tiene una tendencia a decrecer lentamente indicando la acreción hacia un objeto masivo. En cualquier caso, la materia oscura se desenvuelve casi independientemente de la intensidad del proceso de formación estelar.

Finalmente, se encuentra que el efecto de la formación estelar es ineficiente cuando el parámetro de sesgo es del orden de la unidad. Esto puede deberse a que no se tomaron en cuenta las irregularidades locales de la masa. Estas son suavizadas por el modelo, no permitiendo así alcanzar la masa crítica de Jeans en pequeñas escalas posteriores al choque. Sin embargo, el efecto de estas irregularidades puede ser simulado aumentando el valor del parámetro de sesgo y por tanto, disminuyendo el valor de las fluctuaciones de la densidad en un tiempo anterior al tiempo de retorno, permitiendo así considerar masas colapsantes del orden galáctico. Naturalmente, es necesario un modelo que tome en cuenta estas inhomogeneidades locales, así como su evolución, para calibrar la amplitud de dichas fluctuaciones.

REFERENCIAS

- [1] Bertschinger, E. 1985, *Ap. J. (Supplement Series)*, 58, 39.
- [2] Katz, N., Gunn, J.E. 1991, *Ap. J.*, 377, 365.
- [3] Peebles, P. J. E. 1993, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton: Princeton University Press).
- [4] Shapiro, S.L., Teukolsky, S. 1983, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars. The Physics of Compact Objects*.
- [5] 2000, *Physica Scripta*, Vol. T85, 37.
- [6] Navarro, J.F., White, S.D.M. 1993, *M.N.R.A.S.*, 265, 271.
- [7] Urzagasti, D. 2001, *Revista Boliviana de Física*, en publicación.

ESTUDIO DE LAS MICROPULSACIONES DE LA RADIACIÓN CÓSMICA EN EL LABORATORIO DE FISICA CÓSMICA DE CHACALTAYA A 5230 M.S.N.M.

Ergueta V.¹, Velarde A.¹, Saavedra O.²

¹*Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz-Bolivia*

²*Dipartimento di Fisica Generale
Universita di Torino - Italia*

RESUMEN

En un artículo titulado "Short-Period Variations of Cosmic Ray Intensity" [1], el año 1967, M.S.D. Dhanju y V.A. Sarabhai, reportan por primera vez, la observación de micropulsaciones del orden de minutos en los rayos cósmicos. Se repite el estudio con datos actuales del mismo equipo. No se observan las micropulsaciones que Dhanju y Sarabhai reportan. Se concluye que debió haberse tratado un fenómeno esporádico de fluctuación periódica de la radiación y campo magnético interplanetarios.

1. INTRODUCCIÓN

Dhanju y Sarabhai obtuvieron dichos resultados del análisis de los datos registrados por el detector de muones del Observatorio de Chacaltaya entre noviembre de 1965 y marzo de 1966. El detector de muones

es un arreglo consistente en 15 detectores de centelleo de $2 \times 2m^2$ dispuestos de manera que forman un área total de $60m^2$. El arreglo tiene un blindaje de galea equivalente a $3m$ de agua, de modo que la componente electrónica es totalmente absorbida. El conteo de muones es del orden de 10^6ctas./min. . Utilizaron 487 registros de datos de tres horas de duración cada uno, tomados minuto a minuto. Mediante una transformada de Fourier a cada uno de los registros se obtuvieron sus espectros de potencia, que fueron superpuestos para obtener aquellos picos persistentes en cada uno de ellos.

Los resultados de Dhanju y Sarabhai se muestran en la Figura 1.

Se observan en el espectro dos picos muy bien definidos a 18 y 25 *cph* correspondientes a periodos de 200 y 144 s, respectivamente.

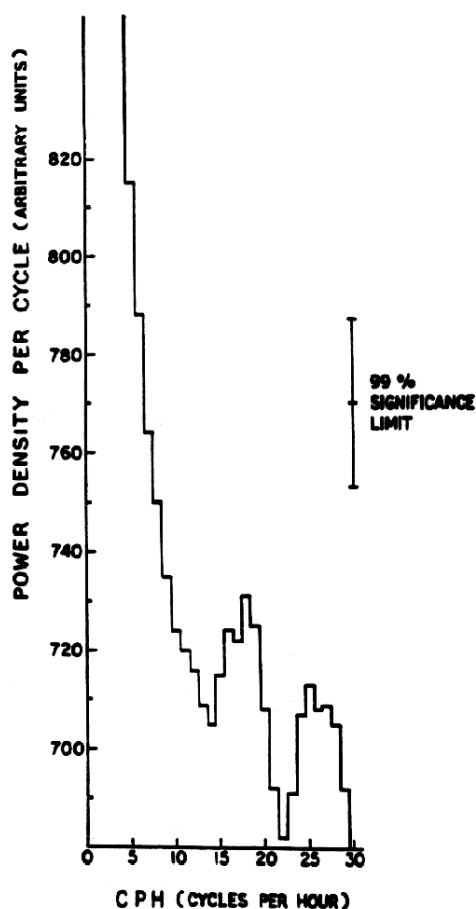


Figura 1.

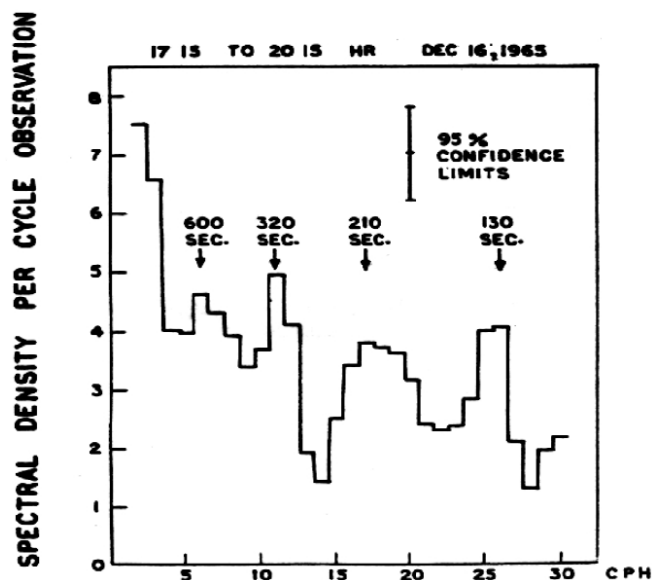


Figura 2.

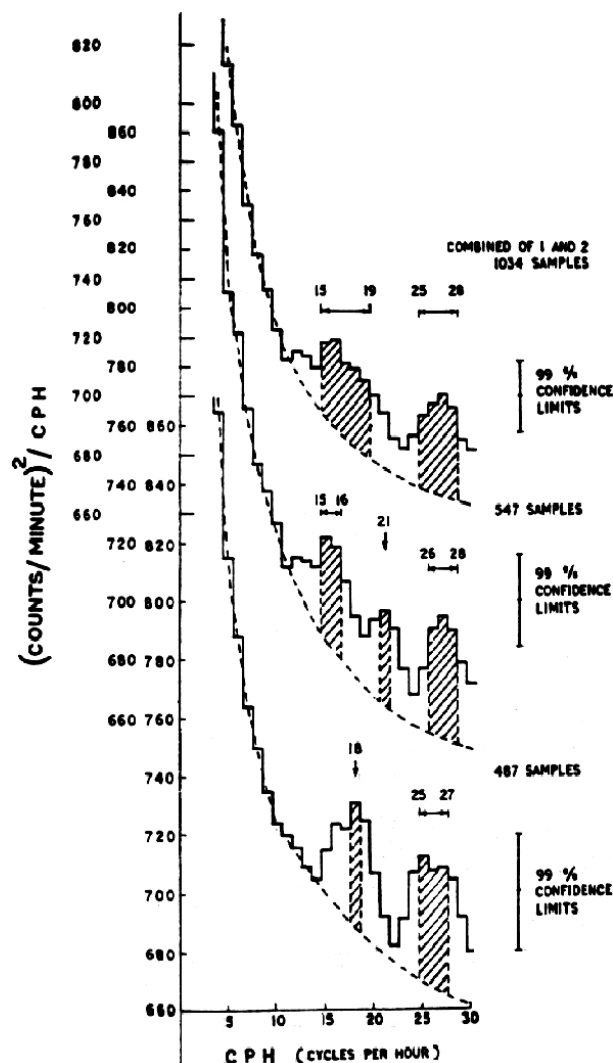


Figura 3.

Estas micropulsaciones en el flujo de los rayos cósmicos pueden entenderse como el reflejo de variaciones periódicas del campo magnético interplanetario que modula a los rayos cósmicos primarios a través de la variación de la rigidez de corte (*cutoff*). Para verificar esto, Dhanju y Sarabhai muestran en la Figura 2 el espectro de potencias de los registros de muones del detector de Chacaltaya correspondientes al intervalo de tres horas del 16 de diciembre de 1965, simultáneo al registro realizado por el Pioneer VI del campo magnético interplanetario. Un análisis espectral de estos datos realizados por Ness, Searce y Cantarano [3], en ese mismo intervalo de tiempo, dio como resultado la observación de picos correspondientes a 600, 300, 180 y 120 s, observándose una buena correspondencia con la densidad espectral de muones de la Figura 1.

Dhanju y Sarabhai, completaron posteriormente más registros de datos hasta junio de 1966, llegando hasta 1034 registros de 3 horas. En la Figura 3 se observa que a más registros se van solapando los picos encontrados. Mediante un ajuste polinomial, determinaron el ancho de frecuencias de cada uno de ellos con un porcentaje de

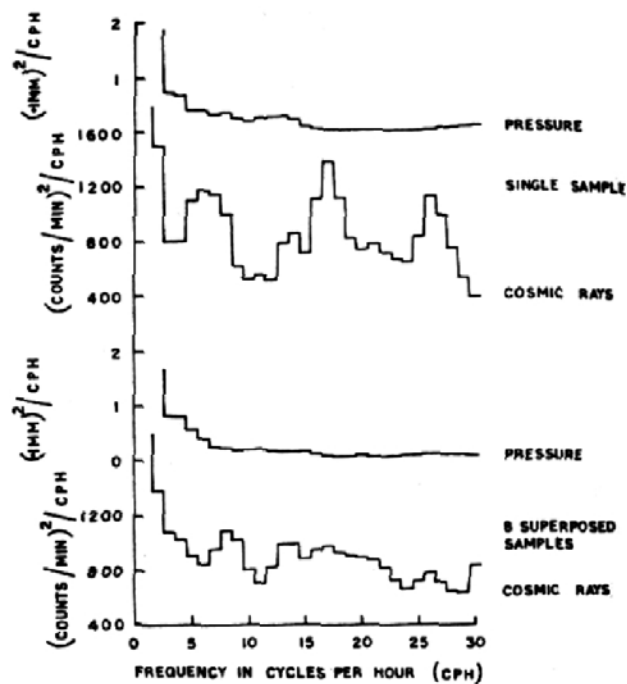


Figura 4.

confiabilidad del 99%.

Realizaron también un análisis de la presión barométrica comparándolo con los resultados obtenidos de la radiación cósmica. De éste se deduce que las variaciones de la presión no están relacionadas con el fenómeno de las micropulsaciones (Figura 4).

Este fenómeno de micropulsaciones de los rayos cósmicos se conoce con el nombre de "centelleo cósmico".

2. COMPONENTES MUÓNICA Y ELECTRÓNICA DE LA RADIACIÓN

Volvimos a repetir la experiencia de Dhanju y Sarabhai con datos actuales de los mismos detectores usados aquella vez para el registro de muones en el laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya. Es claro que si el fenómeno del centelleo cósmico se observa en los muones, con mayor razón se verá en los electrones. Por ello, se han analizado, además, los registros de la radiación cósmica secundaria que a la altura de Chacaltaya -5200 m.s.n.m. (540 gr/m^2)-, está mayoritariamente conformada por electrones (aproximadamente el 55% son electrones), con el fin de ampliar el estudio del centelleo cósmico.

Los registros para el presente trabajo, tanto de los muones como de los electrones, se han obtenido del experimento INCA, que registra las señales de cada uno de los detectores de muones como también de los detectores L de electrones del experimento BASJE en el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya.

En la Figura 5 se muestra la disposición de estos detectores.

Cada uno de los archivos diarios fue revisado verificando y seleccionando aquellos que no muestren ningún tipo de irregularidades. En la Figura 6 observamos un

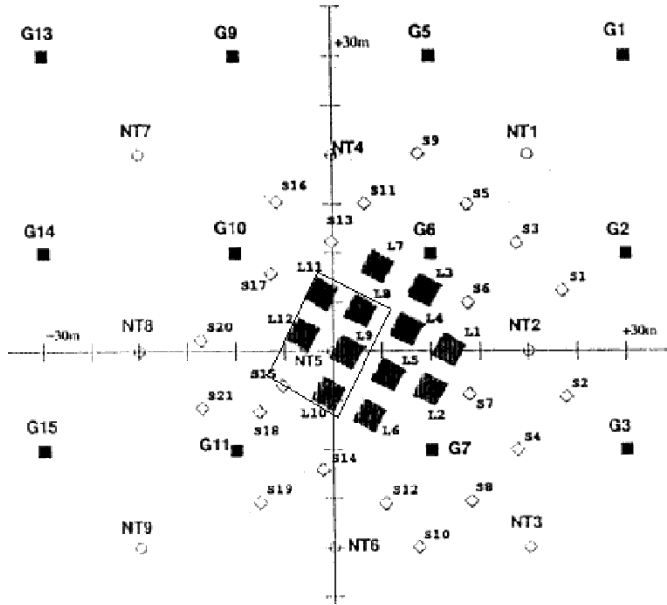


Figura 5. Disposición de los detectores. Los negros son los detectores "L" de electrones. El rectángulo corresponde a los detectores de muones.

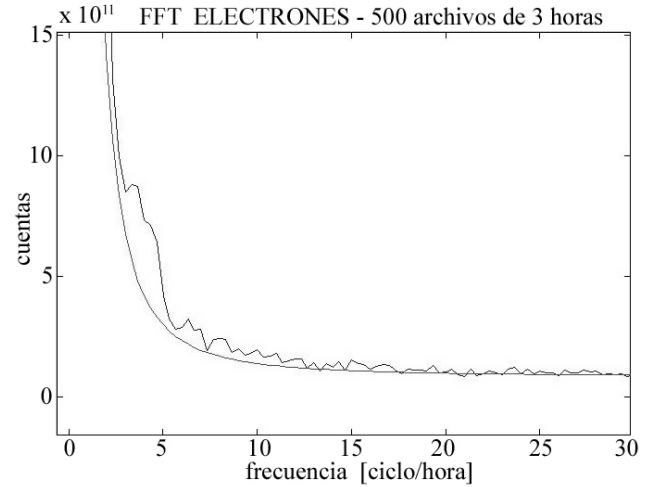


Figura 7. Resultado de aplicar la Transformada Rápida de Fourier a 500 archivos de 3 horas para registros de electrones dentro del rango de frecuencias en estudio, 0 a 30 *cph*. También se muestra la línea base obtenida mediante un ajuste de la forma A/w^2 que es la que mejor ajusta a los datos. w es la frecuencia.

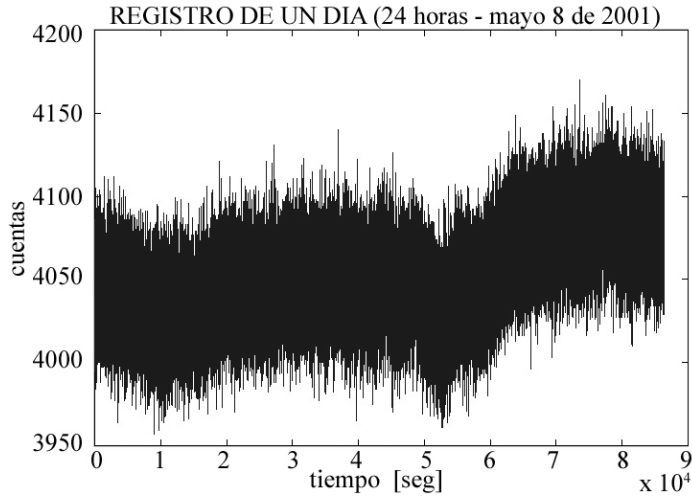


Figura 6.

ejemplo de un archivo diario correspondiente a datos de electrones. Luego, estos archivos son divididos en 8 sub-archivos de tres horas cada uno, los cuales constan de 10800 datos correspondientes a la cantidad de segundos en tres horas.

El conteo promedio de los 12 detectores L es de aproximadamente 5×10^5 partículas/s, es decir, del orden de 10^7 partículas/min. El conteo promedio de los 15 detectores de muones es 10^5 muones/s, esto es, del orden de 10^6 muones/min, que coinciden con el orden de los registrados en 1966 y 1967. De manera que la eficiencia de los detectores es la misma en ambos casos.

Tal como procedieron en 1967, para determinar si existe algún tipo de periodicidad en estos datos,

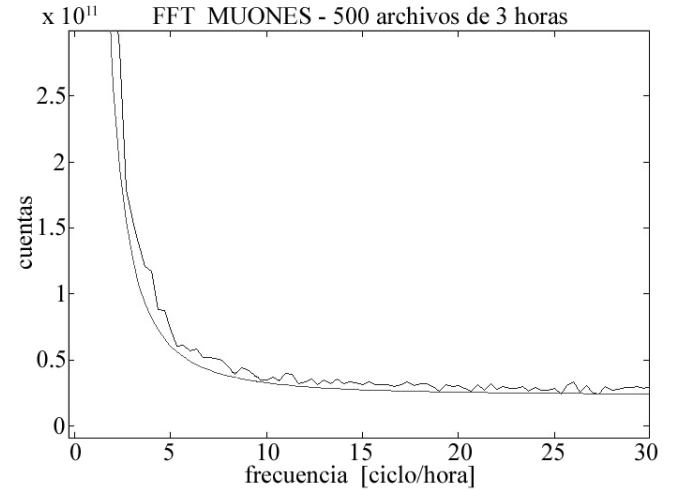
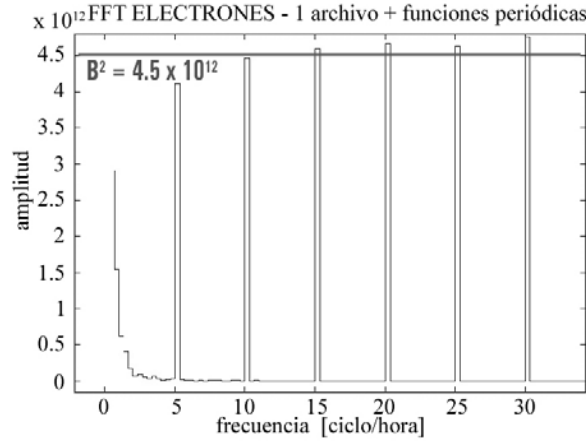


Figura 8. Resultado de aplicar la Transformada Rápida de Fourier a 500 archivos de 3 horas para registros de muones dentro del rango de frecuencias en estudio, 0 a 30 *cph*. También se muestra la línea base ajustada a la función A/w^2 .

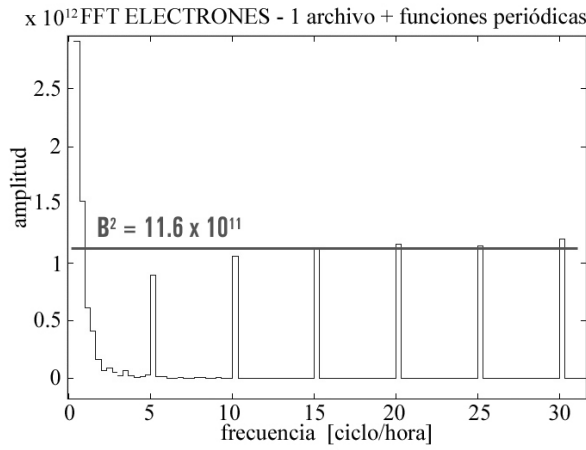
tomamos la Transformada Rápida de Fourier (FFT) y la aplicamos individualmente a cada registro.

Usando la FFT del MATLAB a nuestros datos de electrones y muones, obtuvimos sus respectivos espectros de potencias, los cuales se van superponiendo, registro tras registro, consiguiendo los resultados que se muestran en las figuras para 500 archivos de 3 horas. Las figuras 7 y 8 muestran el resultado en el rango de 0 a 30 ciclos/hora.

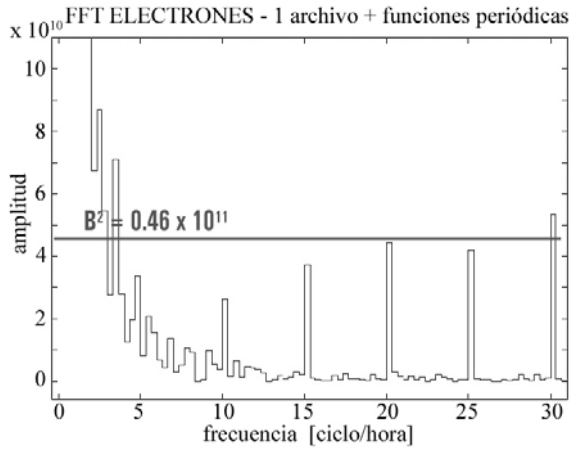
El tamaño B del pulso que se espera en la Transfor-



(a)



(b)



(c)

Figura 9. Transformada para un archivo de electrones + funciones periódicas. (a) Para una amplitud $A = 1\sigma$. Se distinguen con toda claridad las frecuencias características para una amplitud dada de una desviación estándar σ . (b) Con las mismas características de (a) pero con un peso $A = 0.5\sigma$. (c) Con las mismas características de (a) pero con un peso $B = 0.1\sigma$.

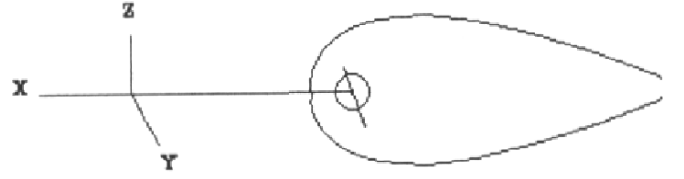


Figura 10.

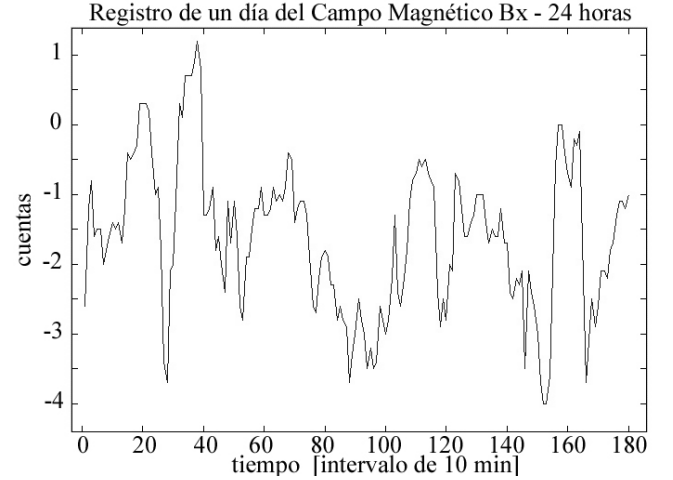


Figura 11. Registro de un día para la componente x del campo magnético.

mada de Fourier de una función periódica de amplitud A , tamaño T_0 (número de datos de la muestra), discretos en intervalos de T , es [4]:

$$B = \frac{AT_0}{2T}$$

En nuestro caso, $T_0 = 10800s$ (archivos de tres horas cada uno), $T = 1s$; de donde:

$$B = 5400A$$

El tamaño de la señal que se observa en el Espectro de Potencias es entonces:

$$B^2 = 2.9 \times 10^7 A^2$$

Es decir, un pulso muy grande.

Para verificar la respuesta del MATLAB a posibles periodicidades en un grupo de datos, añadimos funciones periódicas con frecuencias en 5, 10, 15, 20, 25 y 30 ciclos/hora.

Tomamos como ejemplo nuestros datos de electrones. Sumamos una función periódica del tipo $B\sin(\omega t)$ al archivo de electrones y volvemos a calcular la FFT.

En la Figura 9 mostramos los resultados para $\sin(\omega t)$ con distintos pesos A , donde A serán submúltiplos de la desviación estándar de los datos para un archivo de electrones ($\sigma \approx 7 \times 10^2 \text{ electrones/s}$). Podemos ver que en caso de existir periodicidad en los datos, la FFT del MATLAB los resalta notoriamente, tratándose aún de pesos muy pequeños, por lo que nuestro paquete informático pasa la prueba y nuestros datos no presentan ninguna periodicidad esperada.

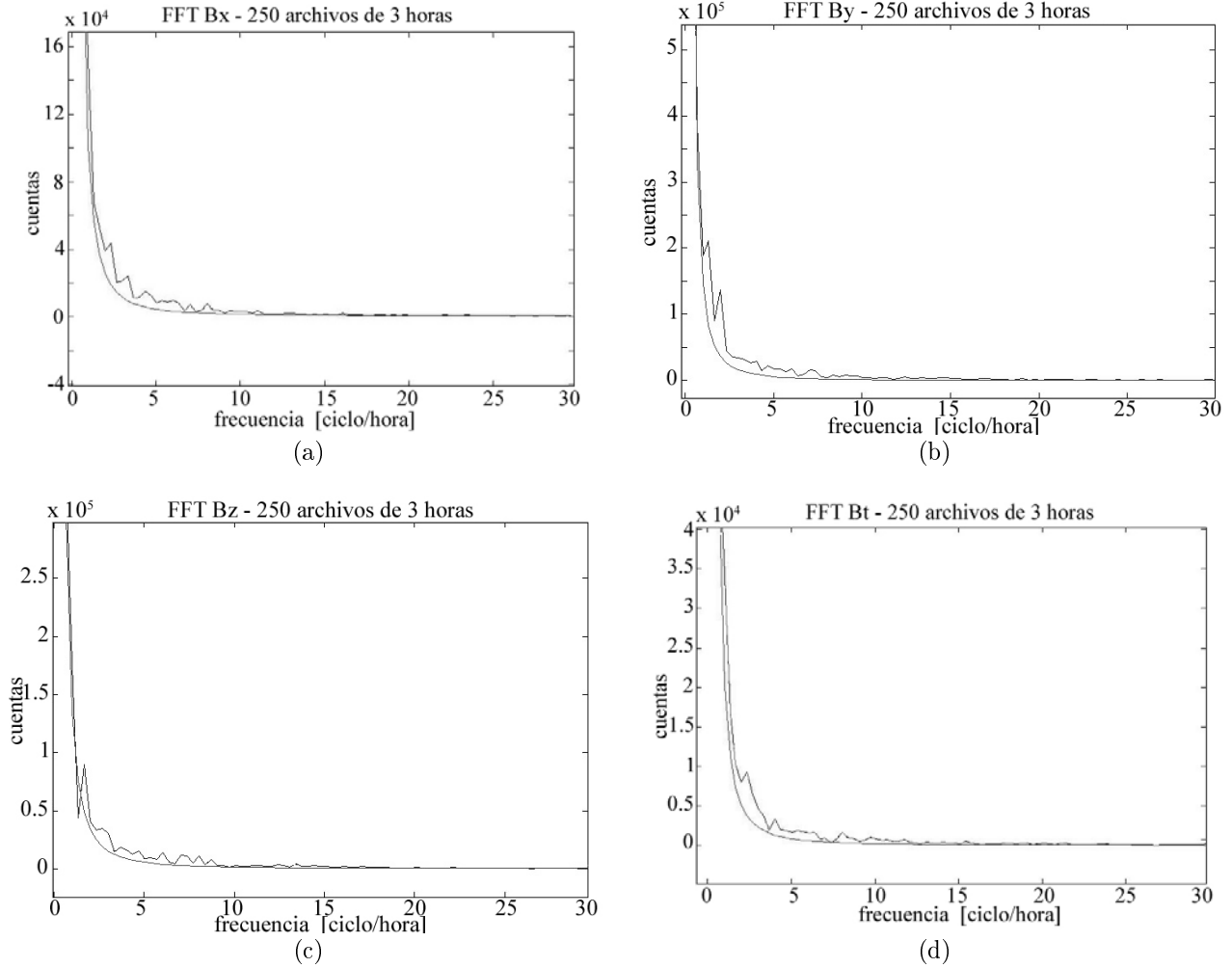


Figura 12. Espectro de potencias acumulado sobre 250 archivos de 3 horas para registros de las componentes B_x , B_y , B_z y B_t del campo magnético interplanetario. En estos gráficos se muestra un ajuste a una función base de la forma A/w^2 donde w es la frecuencia. (a). Componente B_x . (b) Componente B_y . (c) Componente B_z . (d) Campo magnético total B_t .

Si continuásemos disminuyendo la amplitud logaríamos aún ver periodicidades claramente marcadas hasta valores de 0.05σ .

3. MODULACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO INTERPLANETARIO

Veremos ahora cómo se comporta el campo magnético interplanetario.

Para las mismas fechas de la recolección de datos de muones y electrones, de *internet* hemos bajado los registros del campo magnético interplanetario de NOAA, medidos por el magnetómetro del satélite ACE [5]. El sistema de coordenadas de estos datos es el sistema GSM (*Geocentric Solar Magnetic Field*), como se muestra en la Figura 10.

Trabajamos con datos de las componentes x , y , z y total del campo magnético interplanetario. Utilizamos 250 archivos de 3 horas tomados minuto a minuto.

Procedimos de igual forma que el análisis anterior. Se escogen aquellos archivos que no registren ningún tipo

de irregularidades (Figura 11), se aplica la Transformada Rápida de Fourier (FFT) superponiendo los espectros de todos de archivos (Figura 12).

4. DENSIDAD PROTÓNICA INTERPLANETARIA

También, a través de *internet* se obtuvieron los registros minuto a minuto de la densidad de protones medidos por el magnetómetro del satélite ACE [5].

Los resultados obtenidos del análisis aplicado a éstos datos (ver Figura 13), igual que en los anteriores casos, no presentan ninguna periodicidad en el rango de frecuencias que analizamos.

5. CONCLUSIÓN

De los resultados obtenidos, tanto para las componentes muónica y electrónica de la radiación cósmica, como para los registros de campo magnético y densidad protónica interplanetarias, se verifica que no se observa el fenómeno del centelleo cósmico en el rango de frecuencias de 5 a 30 ciclos por hora. Por lo que las pulsaciones

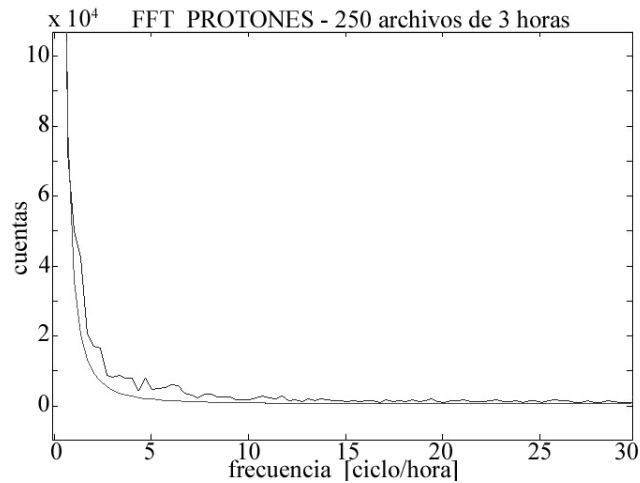


Figura 13. Registro de protones del satélite SAE.

de Rayos Cósmicos de alta frecuencia observadas y reportadas por Dhanju y Sarabhai en 1967 concomitantes con una similar oscilación en el campo magnético

interplanetario, han debido ser un suceso esporádico. En todo caso, se demuestra que no constituye un fenómeno permanente.

REFERENCIAS

- [1] "SHORT PERIOD VARIATIONS OF COSMIC-RAY INTENSITY", M. S. Dhanju y V.A. Sarabhai, PHYSICAL REVIEW LETTERS, Vol. 19, Número 5, 31 de Julio de 1967, pág. 252.
- [2] "SHORT-PERIOD FLUCTUATIONS OF COSMIC RAY INTENSITY AT THE GEOMAGNETIC EQUATOR AND THEIR SOLAR AND TERRESTRIAL RELATIONSHIP", M. S. Dhanju y Sarabhai, JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, Space Physics, Vol. 75, No. 10, Abril 1, 1970.
- [3] "PRELIMINARY RESULTS FROM PIONEER VI MAGNETIC FIELD EXPERIMENTS", Ness N. F., C. S. Cearce y S. Cantarano, JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, 71, 3305, 1966.
- [4] The Fast Fourier Transform, E. Oran Brigham, Prentice Hall Inc. Englewood, New Jersey, pp 100 - 104, 1974
- [5] <http://www.sel.noaa.gov/Data/geomag.html> U. S. Department of Commerce, NOAA, Space Environment Center.

TRANSPORTE DE UN ELECTRÓN CRISTALINO POR EFECTO ACUMULADO DE LOCALIZACIONES ASINTÓTICAS

Diego Sanjinés C.¹

*Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
Casilla 8635, La Paz - Bolivia*

RESUMEN

Se estudia el efecto que tiene un campo eléctrico homogéneo con una dependencia temporal (periódica) del tipo “diente de sierra”, sobre la propagación de un electrón cristalino con un hamiltoniano de enlace fuerte. Como resultado de las simulaciones numéricas, se encuentra que durante los primeros instantes el electrón tiende a propagarse en una dirección preferencial del cristal, aunque dicha propagación está acompañada de una dispersión creciente del paquete de ondas electrónico a medida transcurre el tiempo. Sin embargo, al aumentar la frecuencia del campo eléctrico y la pendiente de cada “diente”, se observa un fenómeno muy interesante: en lugar de propagarse de forma unidireccional, el electrón entra en un régimen oscilatorio cuya frecuencia es distinta a la del campo externo; ya que la dispersión del paquete de ondas oscila y está acotada, se puede pensar eventualmente en observar dicho fenómeno en un experimento, al menos durante un lapso corto en el que puedan ocurrir algunas oscilaciones de Bloch completas. Este efecto es inesperado pues cada vez que un “diente” del campo eléctrico actúa sobre el electrón, éste tiene su velocidad orientada en una misma dirección del cristal, por lo que intuitivamente se pensaría en un fenómeno de “resonancia” cuyo efecto sería la propagación unidireccional del electrón. Se puede mostrar analíticamente que bajo ciertas condiciones, el electrón tiende a “sentir” un campo eléctrico promedio estático, cuyo efecto es localizarlo en un régimen oscilatorio que inhibirá su propagación, i.e., no se medirá una corriente neta DC.

1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento dinámico de un electrón en presencia del potencial periódico de una red cristalina, además del potencial provocado por un campo eléctrico externo arbitrario, es lo que se puede referir en adelante como “el problema de transporte de un electrón cristalino”. Aunque el formalismo teórico desarrollado en este artículo corresponde al problema de una partícula, su generalización para el caso de un flujo de partículas se podría obtener, por ejemplo, a través de la ecuación de continuidad. Ciertamente, a partir de las propiedades dinámicas de un electrón, se puede dilucidar las propiedades macroscópicas de transporte en un cristal, como ser el caso del transporte de corriente eléctrica[1].

Los efectos relevantes en el contexto de este trabajo corresponden a las diferentes formas en que se manifiesta el fenómeno de localización del electrón cristalino, esto es, el movimiento (que puede ser periódico) del electrón en una región finita o localizada del cristal (por lo que no habría corriente eléctrica directa o corriente DC); dicho movimiento está determinado por la posición

y velocidad medias del paquete de ondas electrónico, así como por su “ancho” o desplazamiento cuadrático medio definido en el sentido usual de la varianza (cf. sección 2). El fenómeno de localización en presencia de un campo eléctrico estático y homogéneo, es conocido como oscilación de Bloch (OB), y —aunque fue predicho[2] bajo la suposición de un modelo semiclásico en 1928— solamente a partir de los años 80 se comprendió que se trata de un fenómeno cuántico[1]; la observación experimental directa de la OB como un desplazamiento periódico de carga eléctrica en una superred de semiconductores (SSL) se verificó recién en el año 1997[3]. Teóricamente se ha sugerido la posibilidad de observar el fenómeno de localización dinámica[4], que ocurriría en presencia de un campo eléctrico homogéneo con una dependencia temporal armónica. Otra forma de localización que ha sido propuesta recientemente[5] es aquella que se puede denominar *localización asintótica*, pues correspondería al régimen oscilatorio de un electrón en presencia de un campo eléctrico homogéneo cuya magnitud crece linealmente con el tiempo; en estas circunstancias, como se verá en la sección 2, el electrón se localizaría a una cierta distancia efectiva D a partir de su posición inicial, a través de una serie de oscilaciones con una amplitud

¹Email: sanjin@fiums.a.edu.bo

que decrece como función inversa del tiempo. De aquí la denominación de *localización asintótica*.

En este trabajo se examinará algunos de los efectos teóricos y numéricos que tendría el someter a un electrón a una secuencia de localizaciones asintóticas como consecuencia de la aplicación de un campo eléctrico externo homogéneo con una dependencia temporal del tipo “diente de sierra”, esto es, un campo eléctrico periódico donde cada periodo de tiempo consiste de una rampa que induce al electrón a localizarse; luego el campo se apaga súbitamente y el proceso de localización se repite. Así, se esperaría que el electrón “avance” en una sola dirección dando lugar a una corriente DC, y constituyendo por lo tanto un mecanismo efectivo de propagación por el que el electrón se ve impedido de retornar a su posición original². Sin embargo, ya que este es un proceso físico cuántico y debe por lo tanto describirse a través de la ecuación de Schrödinger, se sabe —de acuerdo a la teoría de sistemas dinámicos bajo la acción de potenciales periódicos[6]— que las soluciones para este tipo de sistemas físicos suelen (bajo ciertas condiciones) ser periódicas y estar acotadas, lo que implicaría la localización del electrón y por lo tanto no habría corriente DC.

Esta cuestión se investigará a través de cálculos analíticos y simulaciones numéricas de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, de acuerdo al algoritmo pseudo-espectral, que ha sido estudiado exhaustivamente y puesto a prueba en una serie de casos relevantes[5][7]. En la sección 2 a continuación se presenta el modelo físico del problema a tratar y la interpretación fasorial; en la sección 3 se presenta el formalismo de la localización asintótica; en la sección 4 se presenta los resultados importantes de este trabajo concernientes al efecto acumulado que provoca una secuencia de localizaciones asintóticas; finalmente, en la sección 5 se resume los aspectos relevantes de todo el trabajo.

Vale la pena mencionar que, aunque los efectos debidos a un campo “diente de sierra” son ampliamente conocidos en áreas tales como la electrónica, no ocurre lo mismo en el dominio de la dinámica de electrones cristalinos, cuyo tratamiento estricto corresponde al de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, con un hamiltoniano que usualmente es de enlace fuerte (*tight-binding*)[8]. Se sabe (cf. Alekseev[9], por ejemplo), que aún el uso de dicho modelo (hamiltoniano) en un tratamiento semiclásico —a través de la ecuación de balance— conduce a la predicción de una corriente DC como resultado de la aplicación de un campo externo AC.

2. EL MODELO FÍSICO Y LA INTERPRETACIÓN FASORIAL

El modelo físico supuesto para este tipo de problema estará representado por el hamiltoniano de enlace fuerte de una sola banda, con interacciones a primeros vecinos y en una dimensión,

$$H = T(p) + V(x, t), \quad (1)$$

donde

$$T(p) = -2A \cos(ap) \quad (2)$$

es la “energía cinética” o “energía de banda” dependiente del momentum cristalino p , con A el elemento de salto (*hopping*) del electrón entre sitios vecinos de la red que están separados por una constante de red a . La energía potencial $V(x, t)$ en H describe el efecto sobre el electrón de cualquier fuerza externa que no es intrínseca a la red, mientras que los efectos debidos al potencial periódico atómico ya están incorporados en $T(p)$. Este es el modelo físico que usualmente representa a la dinámica electrónica en sistemas tales como heteroestructuras de semiconductores[10] (que comprenden a las SSL), donde el electrón se transporta bajo el efecto de algún campo eléctrico externo a lo largo del material a través del mecanismo de salto entre sitios vecinos de la red. En este caso, la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$H\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (3)$$

es la función de onda electrónica $\Psi(x, t)$ que se expande en un conjunto completo de funciones de Wannier de una sola banda $\Phi(x - ma)$ localizadas alrededor del sitio m de la red cristalina, esto es,

$$\Psi(x, t) = \sum_m C_m(t) \Phi(x - ma), \quad (4)$$

donde la suma abarca a todos los sitios atómicos de una red cristalina infinita ($-\infty < m < \infty$). Ya que las funciones de Wannier Φ son estacionarias y están fuertemente localizadas, los coeficientes $C_m(t)$ dependientes del tiempo describen el *perfil* o curva envolvente de la función de onda $\Psi(x, t)$ cuando ésta se evalúa en cada sitio de la red, por lo que los $C_m(t)$ representan la evolución del electrón cristalino. En efecto, los principales parámetros de dicha evolución son la posición media $z(t)$ del paquete de ondas definida por

$$z(t) = \langle m \rangle = \sum_m m |C_m(t)|^2, \quad (5)$$

y el “ancho” $w^2(t)$ o desplazamiento cuadrático medio del paquete de ondas definido por

$$w^2(t) = \langle m^2 \rangle = \sum_m m^2 |C_m(t)|^2. \quad (6)$$

Como ya se mostró en trabajos anteriores[5][7], para el caso particular de un potencial lineal $V(x, t) = \alpha(t)x$

²El modelo físico comprendido en este trabajo no incluye efectos disipativos debidos —por lo general— a dispersión fonónica o por electrones térmicos o por impurezas de la red, que impiden al electrón completar la OB.

asociado a un campo eléctrico externo homogéneo, los coeficientes $C_m(t)$ obedecen la ecuación de evolución iterativa

$$C_p^{n+1} = \sum_m C_m^n e^{-ia(m+p)(\alpha_{n+1}+\alpha_n)\lambda/2} i^{m-p} J_{m-p}(\tau), \quad (7)$$

donde $C_m^n = C_m(n\Delta t)$, $\alpha_n = \alpha(n\Delta t)$, $\tau = 2A\Delta t = 4A\lambda$. En este trabajo se eligió, por comodidad, trabajar en las unidades físicas denominadas “atómicas” (cf., por ejemplo, Yoshida[11]) donde $\hbar = 1$, M (masa del electrón)=1, e (carga del electrón)=1 y a (constante de red)=1. La fórmula (7) representa pues el valor que toma el coeficiente C_p^{n+1} después de un instante Δt como función de todos los coeficientes C_m^n en el instante inmediato anterior. Así, el proceso de evaluar (7) en forma iterativa comienza a partir del paquete electrónico inicial definido por los coeficientes C_m^0 ; luego, al establecer la dependencia temporal específica del potencial lineal $V(x, t)$ a través de $\alpha(t)$, se puede conocer el valor de los coeficientes C_m^n para un instante arbitrario $t = n\Delta t$. De esta manera se calcula entonces los parámetros relevantes (5) y (6) necesarios para describir la dinámica electrónica.

Ciertamente, la fórmula recursiva (7) no sería muy útil de no ser que para ciertos casos, como el de un campo eléctrico homogéneo de la forma $E(n\Delta t) = \alpha(n\Delta t)$, la ec. (7) se puede resolver de manera exacta para obtener C_p^n como función de los C_p^0 iniciales. Así, en el límite del continuo temporal ($\Delta t \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, con $t = n\Delta t$) la solución de (7) es:

$$C_p(t) = \sum_m C_m(0) e^{ip[\xi(t)-\eta(t)]} e^{-im\xi(t)} i^{m-p} J_{m-p}(\tau(t)), \quad (8)$$

donde se definió

$$\eta(t) = \int_0^t \alpha(t') dt', \quad (9)$$

$$\tau(t) = \tau(t) e^{i\xi(t)} = u(t) + iv(t), \quad (10)$$

$$u(t) = 2A \int_0^t \cos \eta(t') dt', \quad v(t) = 2A \int_0^t \sin \eta(t') dt'. \quad (11)$$

A partir de las ecs. (8)-(11) se puede mostrar[5] que la posición media del paquete de ondas dada por (5) y su correspondiente velocidad media $v(t)$ se expresan por

$$z(t) = z(0) - |S_0| \tau(t) \sin[\xi(t) + \theta_0], \quad (12)$$

$$v(t) = v(0) \frac{\sin[\eta(t) + \theta_0]}{\sin \theta_0}, \quad (13)$$

$$v(0) = -2A |S_0| \sin \theta_0, \quad (14)$$

donde se ha supuesto un paquete de ondas inicial representado por los coeficientes C_m^0 tales que

$$|S_0| e^{i\theta_0} \equiv \sum_m (C_{m+1}^0)^* C_m^0. \quad (15)$$

Luego, dado un campo eléctrico homogéneo $E(t) = \alpha(t)$, la evolución dinámica del paquete de ondas electrónico se puede representar gráficamente como la evolución del vector $\tau(t)$ en el plano complejo (o plano de Argand) definido por los ejes $u-v$ de acuerdo a (10). Esta representación gráfica se denomina “interpretación fasorial” [5] (Fig.1). Así, a medida que varía el tiempo t , el vector $\tau(t)$ describe una curva en el plano complejo $u-v$, donde los valores medios de la posición $z(t)$ y velocidad $v(t)$ quedan determinados de manera única por las propiedades geométricas de dicha curva. Si el electrón tiene una velocidad inicial $v(0)$, de acuerdo a (14) existe un ángulo θ_0 por el que se obtiene el plano rotado $u'-v'$. Luego, el desplazamiento del electrón es proporcional a la proyección del vector $\tau(t)$ a lo largo del eje v' , mientras que, de acuerdo a (13), la velocidad del electrón resulta ser proporcional a $\sin[\eta(t) + \theta_0]$, donde $\eta(t) + \theta_0$ es el ángulo que forma (en el instante t) la recta tangente a la curva generada por $\tau(t)$ con el eje u' .

En el caso particular de un campo eléctrico homogéneo y estático ($E(t) = \alpha$) en el que se mueve un electrón cuya velocidad inicial es $v(0) = 0$, la curva que describe el vector $\tau(t)$ en el plano $u-v$ es una circunferencia de radio $R = 2a/\alpha$ centrada en el punto $(0, R)$. Así, bajo la interpretación fasorial, la dinámica del electrón se traduce en un movimiento circular uniforme que no es otra cosa que la conocida oscilación de Bloch (OB) con amplitud R y periodo $\tau_B = 2\pi/\alpha$.

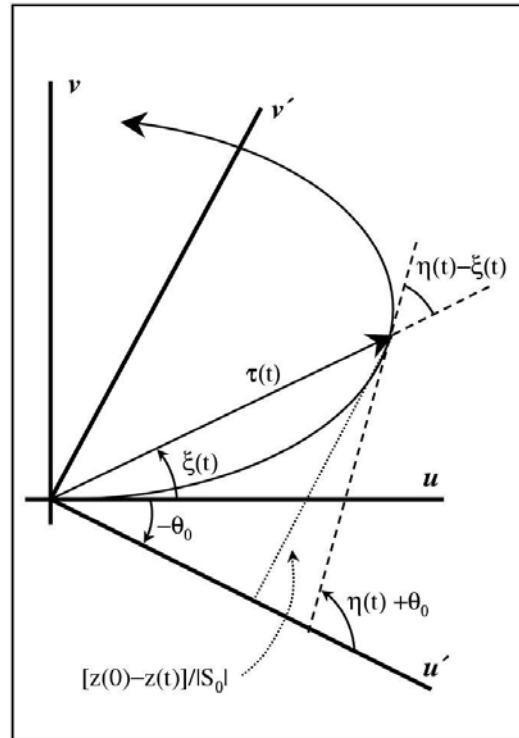


Figura 1. Representación en el plano complejo $u-v$ de la curva descrita por $\tau(t)$ de acuerdo a (10). El ángulo θ_0 corresponde a los ejes rotados $u'-v'$, y está relacionado con la velocidad inicial del electrón según (14).

3. LOCALIZACIÓN ASINTÓTICA

Cuando el campo eléctrico homogéneo depende del tiempo linealmente como

$$E(t) = \kappa t, \quad (16)$$

entonces el vector $\tau(t)$ es

$$\tau(t) = 2A\gamma [\mathcal{C}(t/\gamma) + i\mathcal{S}(t/\gamma)], \quad (17)$$

donde $\gamma = \sqrt{\pi/\kappa}$; los símbolos $\mathcal{C}(t/\gamma)$ y $\mathcal{S}(t/\gamma)$ están relacionados con las integrales de Fresnel[12] como

$$\mathcal{C}(x) + i\mathcal{S}(x) = \int_0^x \exp\left(i\frac{\pi}{2}y^2\right) dy. \quad (18)$$

Así, la curva descrita por el vector $\tau(t)$ (aparte de un factor global $2A\gamma$) corresponde a la “espiral de Cornu” o “clotoide”[13] (Fig.2), para la que se verifica el límite asintótico

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tau(t)| = \sqrt{2}A\gamma. \quad (19)$$

Debido a la naturaleza geométrica de la espiral de Cornu, se puede inferir el comportamiento dinámico del electrón: a medida que el tiempo transcurre, el campo eléctrico $E(t) \propto t$ localiza al electrón en un régimen oscilatorio “amortiguado” con periodo y amplitud decrecientes alrededor de la posición final $z(\infty)$ dada por

$$z(\infty) = z(0) - v_0 \frac{\sin(\theta_0 + \pi/4)}{\sin \theta_0} \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa}}. \quad (20)$$

Ya que el valor de $|\tau(t)|$ permanece acotado de acuerdo al límite asintótico (19), se puede mostrar que el desplazamiento cuadrático medio $w^2(t)$ en (6) queda asimismo acotado, dando lugar a un régimen dinámico de *localización asintótica* que resulta ser esencialmente diferente de los casos ya conocidos de localización estática y dinámica considerados, por ejemplo, por Dunlap-Kenkre[13].

Este tipo de fenómeno es intuitivamente comprensible, pues ya se sabe que para las OB, la amplitud de cada oscilación es inversamente proporcional a la magnitud del campo eléctrico, $R \propto \alpha^{-1}$; luego, si dicha magnitud crece linealmente con el tiempo, entonces la amplitud de cada “OB instantánea” disminuye como t^{-1} , localizando así al electrón a una distancia neta $D = |z(\infty) - z(0)|$ a partir de su posición inicial. La designación de localización asintótica se debe pues al comportamiento t^{-1} de la amplitud de esta oscilación. Un valor particularmente interesante de la velocidad inicial $v(0)$ en (14) corresponde a $\theta_0 = \pi/4$, pues —como se puede apreciar de las Figs. 1 y 2, así como de (20)—ello implica un desplazamiento máximo

$$D = A|S_0| \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}}, \quad (21)$$

así como un valor mínimo del desplazamiento cuadrático medio $w^2(\infty)$. En la Fig.4 se puede ver varias simulaciones numéricas realizadas de manera iterativa con la fórmula pseudo-espectral (7).

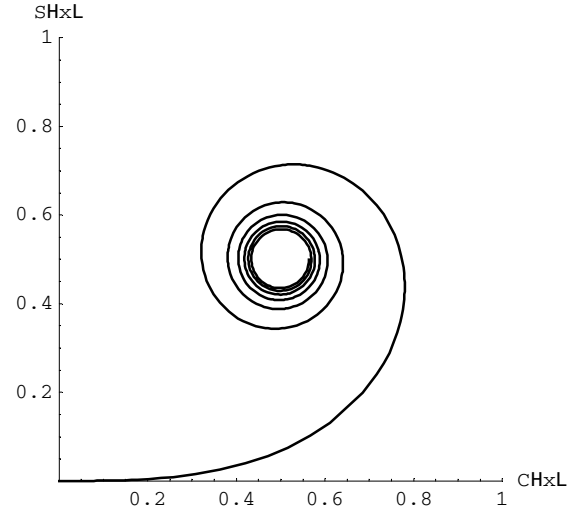


Figura 2. Espiral de Cornu graficada en el plano de Argand de acuerdo a (18) con $0 < x < 10$.

4. EL EFECTO ACUMULADO DE LOCALIZACIONES ASINTÓTICAS

En vista de lo anterior, surge una posibilidad interesante que es el motivo principal de este trabajo: *¿cuál sería el efecto neto de someter a un electrón a una sucesión de localizaciones asintóticas?* Consideremos que, para lograr tal sucesión, el campo eléctrico correspondiente tendría que depender del tiempo como una función periódica del tipo “diente de sierra”:

$$E(t) = \kappa(t - nT), \quad t \in [nT, (n+1)T], \quad (22)$$

para todo entero n . La elección del periodo T debería ser tal que el electrón inicie su movimiento en el intervalo temporal $[(n+1)T, (n+2)T]$ bajo las mismas condiciones en que se inició en el intervalo inmediato anterior $[nT, (n+1)T]$. Así, —a primera vista— podría pensarse que el electrón se transportará en una dirección preferencial del cristal a través de una sucesión de desplazamientos netos de magnitud D dada por (21). El efecto físico de dicho transporte se manifestaría entonces como una corriente DC. Por otra parte, como se mencionó en la sección 1, de acuerdo a la teoría de los sistemas dinámicos bajo la acción de potenciales periódicos, la solución de la ecuación de Schrödinger (3) bien podría ser periódica y acotada, lo que implicaría localización del electrón y, en consecuencia, ninguna corriente DC.

A fin de investigar esta cuestión, establezcamos las condiciones necesarias para lograr un efecto acumulado de localizaciones asintóticas. Para que el electrón inicie su movimiento en cada periodo $[nT, (n+1)T]$ con las mismas condiciones que en el periodo inmediato anterior, la velocidad debe cumplir que $v(T) = v(0)$ en (13), i.e., $\sin[\eta(T) + \theta_0] = \sin \theta_0$, de donde se tiene que $\eta(T) = 2m\pi$ para todo entero m . Sustituyendo $\alpha(t') = E(t') = \kappa t'$ en (9), se obtiene $\eta(T) = \kappa T^2/2$, de donde $T^2 = 4\pi m/\kappa$. El entero m representaría al número de “oscilaciones de Bloch” de amplitud decreciente que ocurren a medida

que el electrón tiende a localizarse asintóticamente en cada periodo $[nT, (n+1)T]$. Estableciendo arbitrariamente $m = 36$, se tiene que

$$T = 12\sqrt{\pi/\kappa}. \quad (23)$$

De esta manera, la función periódica $E(t)$ en (22) se representa como la serie de Fourier

$$E(t) = \kappa\sigma \left[\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt/\sigma)}{n} \right], \quad (24)$$

donde se definió $\sigma = T/2\pi = 6/\sqrt{\pi\kappa}$. En la Fig.3 se puede ver la simulación numérica de $E(t)$ correspondiente a 30 términos de la suma en (24). Nótese que para cada transición entre un periodo de $E(t)$ y el siguiente, la función $E(t)$ exhibe valores ligeramente negativos a través de pendientes muy pronunciadas, lo que se debe ciertamente al truncamiento de la serie de Fourier. Sin embargo, resulta interesante notar la eventual conexión con un teorema reciente debido a Dignam[14] sobre la localización provocada por potenciales eléctricos periódicos: “los únicos campos eléctricos AC que producen localización dinámica exacta nunca pueden ser nulos, por lo que necesariamente son discontinuos allí donde cambian de signo”.

Un caso relevante que se puede explorar de manera analítica corresponde al límite

$$\lim_{T \rightarrow 0, \kappa \rightarrow \infty} T\sqrt{\kappa} = 12\sqrt{\pi}, \quad (25)$$

que representa a una serie muy densa de “dientes de sierra”, donde cada diente tiene una pendiente κ muy pronunciada. En este caso, ya que el desplazamiento neto en (21) varía como $D \propto 1/\sqrt{\kappa}$, se podría esperar que ocurra la propagación del electrón cristalino a través de una secuencia continua de desplazamientos D infinitesimales. Sin embargo, ya que la suma en (24) converge (aunque lentamente), también se podría pensar en la aparición de un campo eléctrico “efectivo” estático E^* cuyo va-

lor se puede calcular como el promedio de $E(t)$ sobre un periodo T ,

$$E^* = \frac{1}{T} \int_0^T \kappa t dt = 6\sqrt{\pi\kappa} = \kappa\pi\sigma; \quad (26)$$

el valor así calculado de E^* corresponde al primer término del desarrollo de Fourier de $E(t)$ en (24). En este caso, la “presencia” dominante de un campo eléctrico efectivo estático implicaría asimismo un régimen dinámico efectivo de OB con periodo

$$\tau_B^* = \frac{2\pi}{E^*} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}. \quad (27)$$

El resultado de (27) anuncia que la OB efectiva tiene un periodo que disminuye como $\kappa^{-1/2}$, esto es, mientras mayor es la pendiente de cada diente de sierra, menor es el periodo de OB.

En la Fig.5 se tiene una secuencia de simulaciones realizadas por medio de la fórmula iterativa pseudo-espectral (7). En todos los casos se muestra $z(t)$ y $w^2(t)$ como funciones del tiempo t . La línea segmentada en el gráfico (a) representa al campo eléctrico $E(t)$ “diente de sierra”, donde el periodo T se calculó según (23). En los siguientes gráficos se incrementó el valor de la pendiente κ de cada diente, por lo que el periodo T es menor. Como se puede ver, en (a) y (b) el electrón se transporta en una dirección preferencial, al menos hasta donde se puede apreciar en estas simulaciones numéricas dados los valores máximos de t que se eligió en cada caso. En (c) se nota un punto de retorno en el movimiento del electrón; en (d) y (e) ya es evidente que la dinámica electrónica corresponde un régimen oscilatorio cuya amplitud y periodo disminuyen a medida que aumenta κ , en concordancia cualitativa con lo que se esperaría que suceda en presencia de un campo eléctrico estático efectivo; sin embargo, el periodo de esta oscilación no coincide numéricamente con el valor de τ_B^* calculado en (27), lo que indica seguramente que en el desarrollo de $E(t)$ en (24) no solamente el primer término —que coincide con el lado derecho de (26)— es importante para el cálculo de un campo efectivo E^* , sino que debe tomarse en cuenta más términos. Un cálculo preliminar mostrará la factibilidad de hallar un periodo efectivo τ_B^* asociado al régimen oscilatorio inducido por un campo E^* . Ya que en este régimen oscilan tanto la posición $z(t)$ como la velocidad $v(t)$, entonces se debe cumplir simultáneamente que

$$z(t + \tau_B^*) = z(t), \quad v(t + \tau_B^*) = v(t). \quad (28)$$

De acuerdo a (13), la segunda ecuación (28) implica que

$$\sin(\eta(t + \tau) + \pi/4) = \sin(\eta(t) + \pi/4), \quad (29)$$

lo que ocurre cuando

$$\eta(t + \tau) = \eta(t) + 2m\pi \quad (30)$$

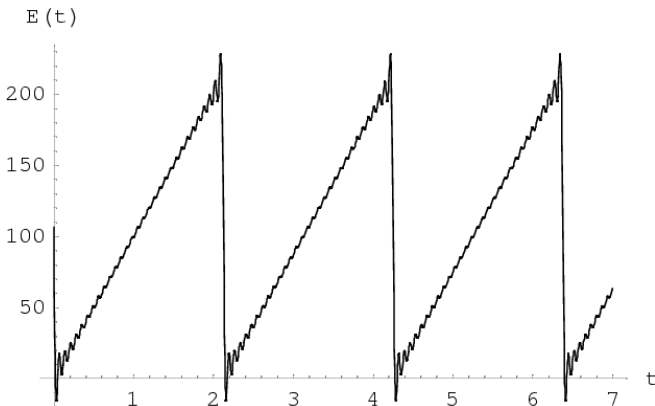


Figura 3. Simulación numérica de $E(t)$ correspondientes a 30 términos de la suma en (24).

para todo entero m . De (9) y (24) se calcula $\eta(t)$ como

$$\eta(t) = \kappa\sigma \left[\pi t - 4\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(nt/2\sigma)}{n} \right)^2 \right]. \quad (31)$$

Sustituyendo (30) en (31) se tiene que

$$\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \tau_B^* = \frac{m}{3} + \frac{24}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sin^2 \left(\frac{n(t + \tau_B^*)}{2\sigma} \right) - \sin^2 \left(\frac{nt}{2\sigma} \right) \right]. \quad (32)$$

Ya que el valor del corchete en (32) está acotado dentro del intervalo $[-1, 1]$, entonces la sumatoria en (32) estará asimismo acotada por el valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (33)$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann[13]. Ya que el lado izquierdo de (32) *no* depende del tiempo t , entonces (32) sólo se cumple si

$$\sin \left(\frac{n(t + \tau_B^*)}{2\sigma} \right) = \pm \sin \left(\frac{nt}{2\sigma} \right), \quad (34)$$

es decir, sólo si se verifica

$$\tau_B^* = \frac{2q\pi\sigma}{n} = 12\frac{q}{n}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}, \quad (35)$$

para enteros arbitrarios q, n tales que su cociente sea positivo, pues siempre se puede suponer —sin pérdida de generalidad— que $\tau_B^* > 0$. Así, (32) queda como

$$\tau_B^* = \frac{m}{3}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}, \quad (36)$$

lo que, junto a (35), implica que $36q = nm$; eligiendo $m = 36p$, se tiene entonces que $q = np$, de donde el periodo efectivo de Bloch resulta ser una función del parámetro κ y del entero positivo p :

$$\tau_B^* = \xi_p(\kappa) = 12p\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}. \quad (37)$$

El resultado predicho por (37), a diferencia del que se obtuvo en (27), es al menos 36 veces mayor que este último, lo que refleja la importancia de los términos que siguen al primero en el desarrollo de $E(t)$ en (24).

A fin de verificar la ec. (37), obtengamos los cocientes adimensionales

$$\frac{\xi_p(\kappa)}{\xi_{p'}(\kappa')} = \frac{p}{p'} \sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa}} \quad (38)$$

para los valores de κ (o κ') que varían entre $\kappa = 1000$ (Fig.5d) y $\kappa = 5000$ (Fig.5e). Para tal efecto, se elaboró la Fig.6 a través de simulaciones numéricas de (7) con valores de κ equidistantes en incrementos de $\Delta\kappa =$

666.67. Definiendo $\kappa_j = 1000 + j\Delta\kappa$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) se obtuvo —a partir de los datos de la Fig.6 (junto con las Figs.5d y 5e)—, los 21 cocientes en (38) correspondientes a $j > j'$. Dichos cocientes y los valores enteros de p (o p') que mejor se acomodan en (38) de acuerdo a los resultados numéricos son:

$\frac{\xi_{30}(\kappa_1)}{\xi_{40}(\kappa_0)} = \frac{234}{402},$	$\frac{\xi_{20}(\kappa_2)}{\xi_{40}(\kappa_0)} = \frac{132}{402},$	$\frac{\xi_{16}(\kappa_3)}{\xi_{40}(\kappa_0)} = \frac{93}{402},$
$\frac{\xi_{30}(\kappa_4)}{\xi_{40}(\kappa_0)} = \frac{158}{402},$	$\frac{\xi_{15}(\kappa_5)}{\xi_{40}(\kappa_0)} = \frac{72}{402},$	$\frac{\xi_{12}(\kappa_6)}{\xi_{40}(\kappa_0)} = \frac{53}{402},$
$\frac{\xi_{20}(\kappa_2)}{\xi_{30}(\kappa_1)} = \frac{132}{234},$	$\frac{\xi_{16}(\kappa_3)}{\xi_{30}(\kappa_1)} = \frac{93}{234},$	$\frac{\xi_{30}(\kappa_4)}{\xi_{30}(\kappa_1)} = \frac{158}{234},$
$\frac{\xi_{15}(\kappa_5)}{\xi_{30}(\kappa_1)} = \frac{72}{234},$	$\frac{\xi_{12}(\kappa_6)}{\xi_{30}(\kappa_1)} = \frac{53}{234},$	$\frac{\xi_{16}(\kappa_3)}{\xi_{20}(\kappa_2)} = \frac{93}{132},$
$\frac{\xi_{30}(\kappa_4)}{\xi_{20}(\kappa_2)} = \frac{158}{132},$	$\frac{\xi_{15}(\kappa_5)}{\xi_{20}(\kappa_2)} = \frac{72}{132},$	$\frac{\xi_{12}(\kappa_6)}{\xi_{20}(\kappa_2)} = \frac{53}{132},$
$\frac{\xi_{30}(\kappa_4)}{\xi_{16}(\kappa_3)} = \frac{158}{93},$	$\frac{\xi_{15}(\kappa_5)}{\xi_{16}(\kappa_3)} = \frac{72}{93},$	$\frac{\xi_{12}(\kappa_6)}{\xi_{16}(\kappa_3)} = \frac{53}{93},$
$\frac{\xi_{15}(\kappa_5)}{\xi_{30}(\kappa_4)} = \frac{72}{158},$	$\frac{\xi_{12}(\kappa_6)}{\xi_{30}(\kappa_4)} = \frac{53}{158},$	$\frac{\xi_{12}(\kappa_6)}{\xi_{15}(\kappa_5)} = \frac{53}{72}.$

Tabla 1

5. CONCLUSIONES

Se sometió un electrón cristalino a la acción de un campo eléctrico periódico tipo “diente de sierra”. Se encontró a través de simulaciones numéricas así como de un análisis riguroso, que hay razones por las cuales se puede pensar que el electrón estará localizado en un régimen oscilatorio con periodo efectivo τ_B^* , por lo que no habrá una corriente neta DC, como podía ser el caso si uno piensa solamente en el efecto tipo “resonancia”³ cuando cada rampa o “diente” del campo eléctrico desplaza sucesivamente al electrón una distancia D . La prueba analítica que muestra la existencia de un campo estático efectivo E^* , es el conjunto de los cocientes de la Tabla 1, donde el lado izquierdo de cada cociente se calculó de acuerdo a (38) y el lado derecho se obtuvo a partir de simulaciones numéricas de (7). La concordancia entre la ec. (38) y los datos de la Tabla 1 es muy buena y seguramente no hubiera sido posible que surgiera casualmente; por ejemplo, la simulación de la Fig.6(d) para κ_4 muestra un periodo efectivo τ_B^* que aparentemente “rompe” el carácter monótonamente decreciente

³ Tal vez sea ilustrativo mencionar que la predicción cuántica de efectos de localización[4] (i.e., inhibición de transporte) en un campo DC-AC de la forma $E(t) \propto \varepsilon + \alpha \cos \omega t$ ocurre cuando $\omega_B \neq n\omega$ (n entero), donde $\tau_B = eae/h$ es la frecuencia angular de la OB, por lo que es tentador acudir a la imagen intuitiva de relacionar el transporte de corriente con la “condición de resonancia” $\omega_B = n\omega$; obsérvese, sin embargo, que en este caso la frecuencia “natural” ω_B es un múltiplo entero de la frecuencia “impulsora” ω , y no al revés (tal como ocurre en la teoría usual de los fenómenos de resonancia). De manera muy interesante, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y el campo externo es puramente AC, ya no existe una frecuencia “natural” de Bloch ($\omega_B = 0$); en este caso, el electrón se localiza si $J_0(\alpha/\omega) = 0$.

de τ_B^* como función de κ a medida que ésta aumenta en (37), sin embargo, el valor de $p = 30$ en (37) da cuenta de dicho comportamiento, pues entre $\xi_{16}(\kappa_3)$ y $\xi_{15}(\kappa_5)$ no se puede acomodar ningún índice entero que permita conservar el monotonismo ya referido. Seguramente, el cálculo que permite obtener los valores únicos de p en (37) está asociado a la verificación de la primera condición en (28), lo que implica integrar (13); este cálculo no sería nada trivial dada de la representación en serie de Fourier (24) y (31). No obstante, en lo que respecta al fenómeno de inhibición del transporte de un electrón cristalino en un campo eléctrico “diente de sierra”, la evidencia numérica de la Tabla 1 puede constituir una buena indicación de la validez de la física que describiría esta clase de fenómenos.

REFERENCIAS

- [1] Bouchard A.M., Luban M., *Phys. Rev. B* **52**, 5105 (1995); Ignatov A.A., Romanov Yu., *Sov. Phys. Solid State* **17**, 2216 (1976).
- [2] Bloch F., *Z. Physik* **52**, 555 (1928).
- [3] Lyssenko V. et al., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 301 (1997).
- [4] Zhao X., *Phys. Lett. A* **155**, 4, 299 (1991).
- [5] Sanjinés D., Gallinar J.-P., *Phys. Rev. B* **64**, 54301 (2001).
- [6] Magnus W., Winkler S., *Hill's Equation* (Interscience Publishers, New York, 1966).
- [7] Sanjinés D., Gallinar J.-P., *J. Phys.: Cond. Matter* **11**, 3729 (1999).
- [8] Ashcroft N.W., Mermin N.D., *Solid State Physics* (Saunders College, Philadelphia, 1976).
- [9] Alekseev K. et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2669 (1998).
- [10] Leo K., *Semiconductor Sci. Tech.* **13**, 249 (1998).
- [11] Yoshida H., *Phys. Lett. A* **150**, 5 (1990).
- [12] Abramowitz M., Stegun I.A., *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).
- [13] Dunlap D.H., Kenkre V.M., *Phys. Rev. B* **34**, 3625 (1986); *Phys. Lett. A* **127**, 438 (1988).
- [14] Dignam M., *Phys. Rev. Lett.* **88**, 4, 6806 (2002).

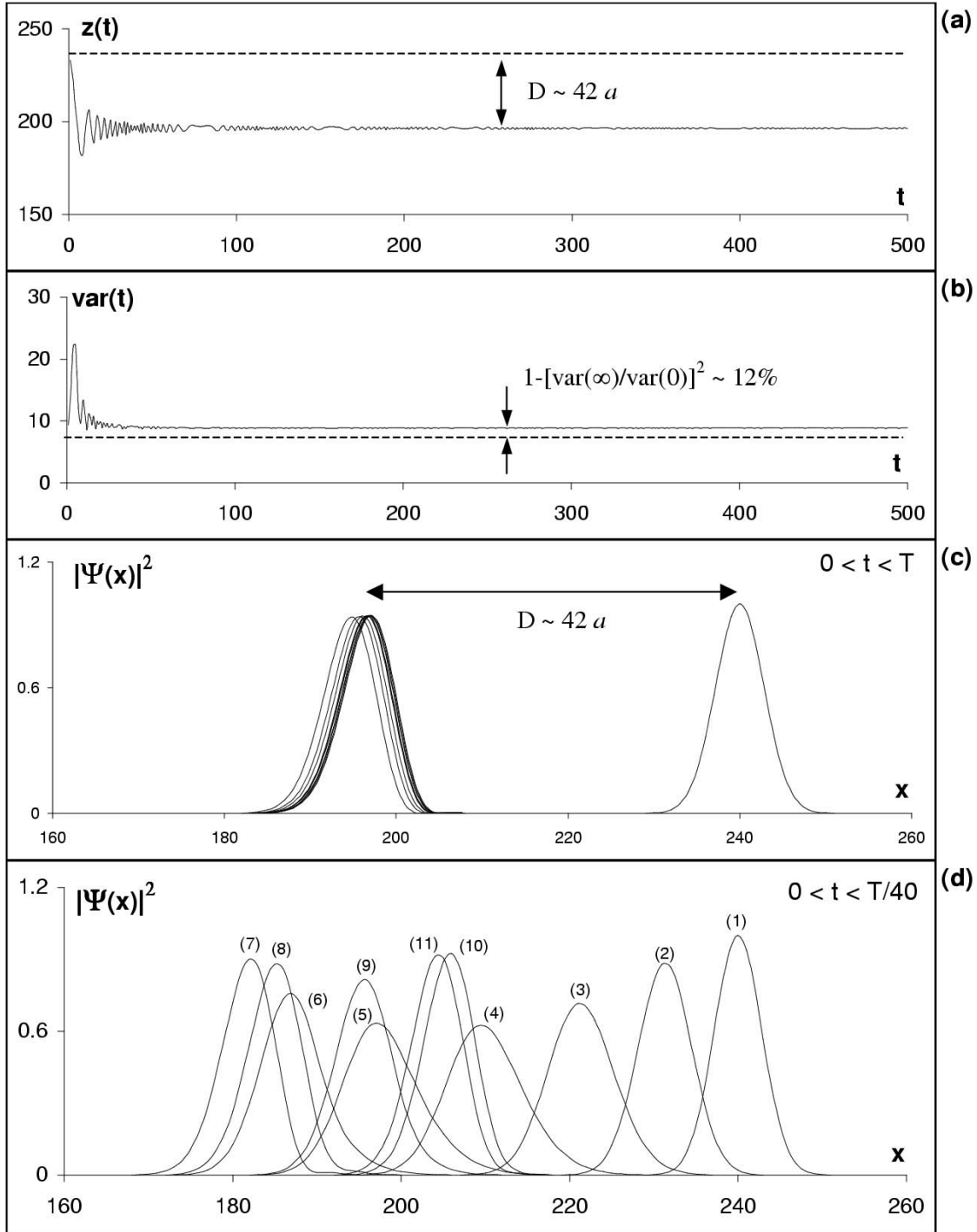


Figura 4. Simulaciones numéricas —de acuerdo a la fórmula iterativa pseudo-espectral (7)— de la dinámica de un paquete de ondas electrónico con velocidad inicial correspondiente a $\theta_0 = \pi/4$ en (14). El paquete inicial es gaussiano; las unidades de los ejes en todos los casos se eligieron de manera apropiada a cada simulación. En los gráficos (a) y (b) se muestra la posición media $z(t)$ y la varianza $var(t) = w^2(t) - z(t)^2$ respectivamente como función del tiempo t . En los gráficos (c) y (d) se tiene el perfil de la densidad de probabilidad cuántica $|\Psi(x)|^2$ como función de la posición x . En (c) se aprecia el fenómeno de localización asintótica para 11 instantes equiespaciados en el intervalo $[0, T]$; en (d) se tiene una secuencia de 11 instantes equiespaciados en el intervalo $[0, T/40]$ y numerados de manera progresiva, lo que permite observar mejor el proceso de localización asintótica a través de “oscilaciones de Bloch” de amplitud decreciente.

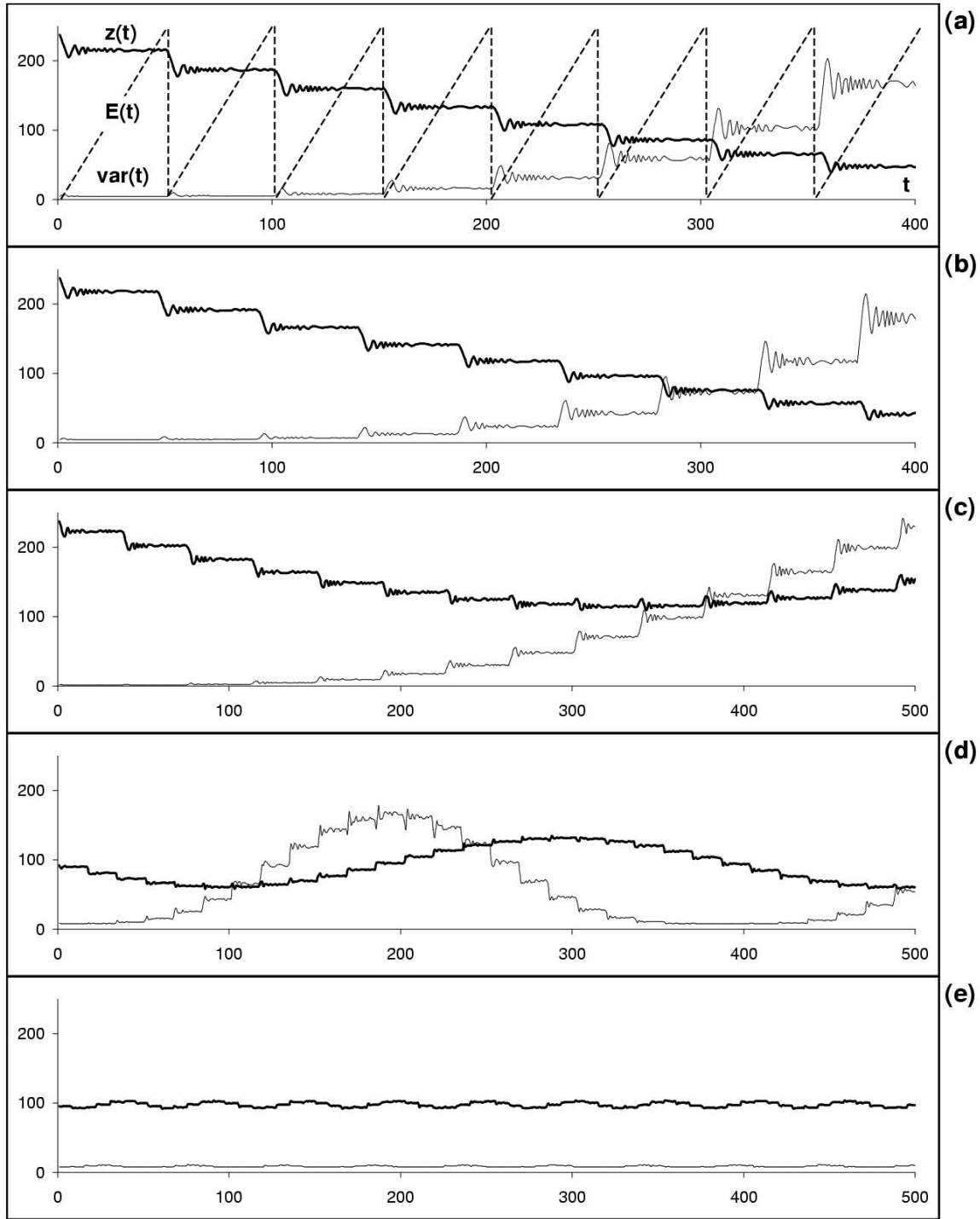


Figura 5. En esta figura se tiene una secuencia de simulaciones para la posición media $z(t)$ y la varianza $var(t) = w^2(t) - z(t)^2$ como funciones del tiempo t . Para $z(t)$ se utilizó la línea continua gruesa, mientras que para $var(t)$ se utilizó la línea continua delgada. La línea segmentada en el gráfico (a) representa al campo eléctrico $E(t)$ “diente de sierra”, donde el periodo T se calculó según (23). En los siguientes gráficos se incrementó el valor de la pendiente κ de cada diente: (a) $\kappa = 110$, (b) $\kappa = 130$, (c) $\kappa = 200$, (d) $\kappa = 1000$, (e) $\kappa = 5000$. En (a) y (b) el electrón parece que se transporta en una dirección preferencial; en (c) se nota un punto de retorno en el movimiento del electrón; en (d) y (e) ya es evidente que la dinámica electrónica corresponde un régimen oscilatorio cuya amplitud y periodo disminuyen a medida que aumenta κ , en concordancia cualitativa con lo que se esperaría que suceda en presencia de un campo eléctrico estático efectivo.

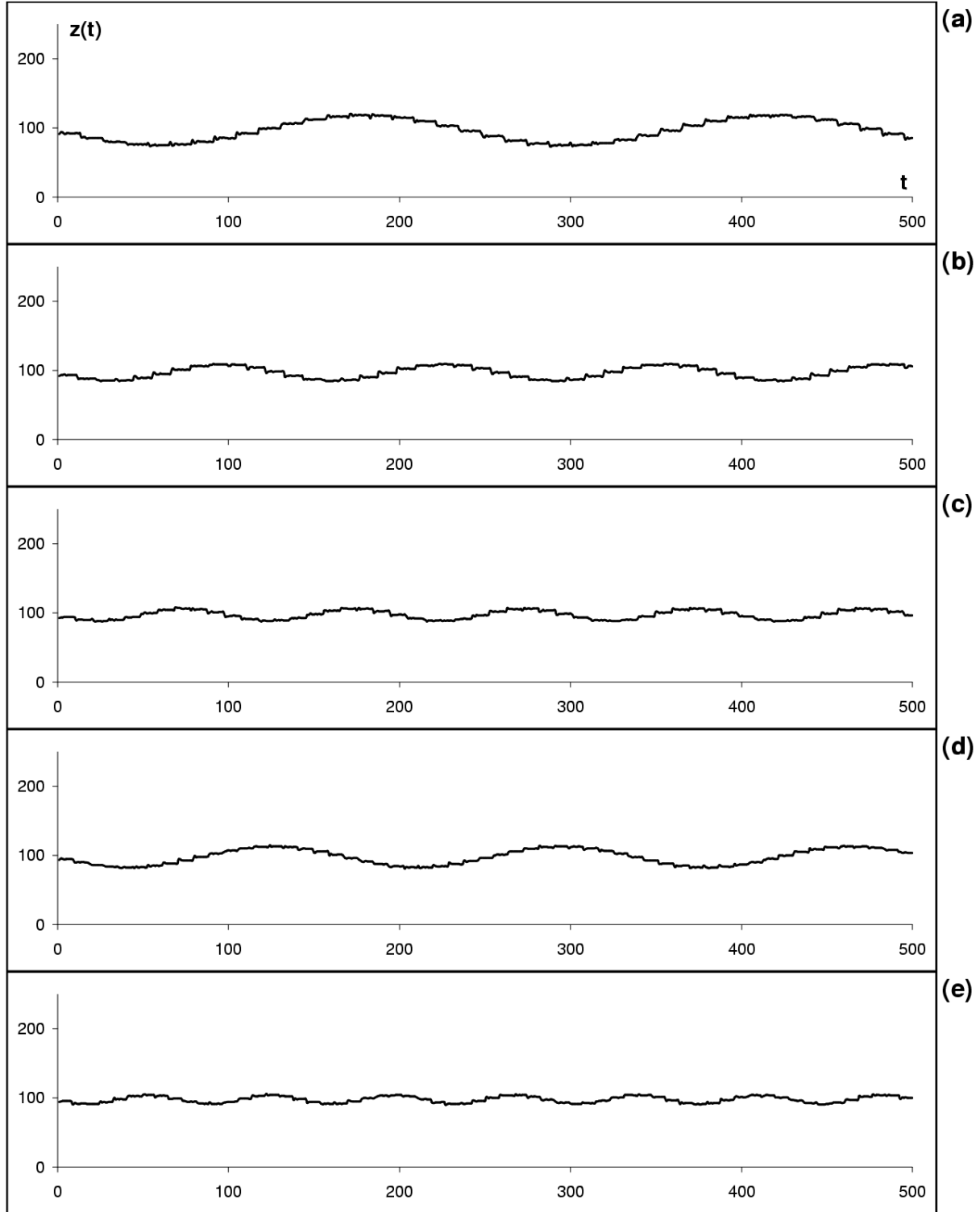


Figura 6. El siguiente conjunto de gráficos representa una “ventana” de valores de κ equidistantes en incrementos de $\Delta\kappa = 666.67$ entre $\kappa = 1000$ y $\kappa = 5000$, que son los gráficos de las Figs. 5(d) y 5(e). Así, los valores correspondientes de κ son: (a) $\kappa = 1666.67$, (b) $\kappa = 2333.33$, (c) $\kappa = 3000$, (d) $\kappa = 3666.67$, (e) $\kappa = 4333.33$. El gráfico 6(d) es particularmente curioso, pues “rompe” el carácter monótonamente decreciente del periodo de Bloch efectivo de τ_B^* a medida que crece κ , pero los resultados de la Tabla 1 junto con la predicción teórica de la ec. (37) confirman el comportamiento de dicho gráfico.

AJUSTE DEL PERFIL RADIAL DEL FLUJO DE RAYOS X PARA OBJETOS EN EL TRAPECIO DE ORION

Urzagasti D.

*Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz-Bolivia*

RESUMEN

Usando los datos observacionales de rayos X provistos por Chandra para tres objetos (probablemente en fase acreción) en la región del Trapecio de Orión, se compara el perfil de densidad de brillo superficial con el predicho por un modelo de acreción de disco semi-delgado. La comparación resulta satisfactoria para todo el perfil, pero sobre todo para las regiones interiores al radio de acreción del modelo. Luego de realizar el ajuste de los datos, resulta que la región donde se tiene la mayor parte de la emisión en rayos X queda dentro de este radio, indicando así la posibilidad de que las regiones nucleares de estos objetos estén en una fase activa del proceso de acreción, con la emisión de energía en rayos X causada por procesos de disipación viscosa.

1. INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo es realizar una comparación entre las observaciones que provienen del proyecto Chandra con un modelo de disco de acreción. Chandra es un conjunto de instrumentos para la observación en rayos X que fue lanzado al espacio en Julio de 1999 [1]. Está diseñado para obtener no sólo imágenes sino también los espectros de objetos astrofísicos en el rango de energía $(0.1 - 10) \text{ Kev}$, donde se tiene la máxima sensibilidad de los instrumentos. Los datos obtenidos consisten básicamente de la posición, energía y tiempo de arribo de cada uno de los eventos, constituyéndose así en una muy completa base de datos sobre la cual distintos modelos pueden ser aplicados y puestos a prueba. Adicionalmente, Chandra cuenta con un conjunto completo de programas destinados al análisis y modelaje de los datos; casi todos ellos comprendidos bajo el programa CIAO ('Chandra Interactive Analysis of Observations'), el cual fue usado aquí para obtener el perfil de densidad de brillo de los objetos estudiados. A los efectos de comparar estos datos con un modelo, se usó un modelo de acreción a fin de ajustar sus parámetros de manera que sobre la base de argumentos físicos plausibles, reprodujera, al menos en el aspecto cualitativo, los rasgos generales del perfil mencionado.

2. LOS OBJETOS SELECCIONADOS

Se seleccionaron tres objetos pertenecientes al cúmulo estelar del Trapecio de Orión. Esta región se muestra rica en objetos rodeadas de gas y por tanto, probablemente en una fase muy activa del proceso de acreción de gas hacia estrellas aisladas, objetos compactos o sistemas binarios. Para la elección no se consideró ningún criterio en especial. Como se puede ver en la Figura 1, la imagen en rayos X de una parte del Trapecio de Orión contiene mayormente objetos con for-

mas circulares, lo que hace suponer que la distribución del gas circundante en cada objeto tiene predominantemente simetría esférica. Entonces, si hubo un criterio, éste fue solo el de elegir objetos fuera del cúmulo central, donde el gas no es compartido entre dos o más objetos y, en consecuencia, preserva su simetría esférica.

Las coordenadas y las características de los objetos son presentadas en la Tabla 1. Dos de ellos son estrellas en nebulosas, no encontrándose una referencia precisa para el tercero. Los datos para toda la región fueron obtenidos de la base de datos de Chandra [1]. Estos corresponden al código ObsId=18 y son datos procesados hasta el segundo nivel, es decir, hasta el nivel en el que sólo los datos que son evaluados como confiables son incluidos.

3. MODELO

Teniendo como objetivo el realizar un ajuste al perfil radial de densidad de energía en rayos X, se utilizó un resultado para la densidad superficial de gas de un disco de acreción (Ascencio 2000 [2]), y con éste, se obtuvo la tasa de disipación de energía por unidad de área de las caras del disco. Aunque el modelo fue construido bajo la aproximación de un disco semi-delgado, es decir, hasta el orden H/R (donde H es la escala de altura del disco, es decir, su espesor perpendicular al plano del disco, y R la coordenada radial medida sobre el plano del mismo), puede ser aplicado en cierta medida a las distribuciones del gas circundante de los objetos seleccionados, las cuales muy posiblemente tienen simetría esférica. La justificación de esto se fundamenta en que la distribución esférica es visualizada como una distribución de disco vista de frente a condición de que las columnas de densidad de ambas sean iguales: $\rho_{esfera} H_{esfera} = \rho_{disco} H_{disco}$. Otro problema aparece con el efecto de la rotación diferencial. En el disco la

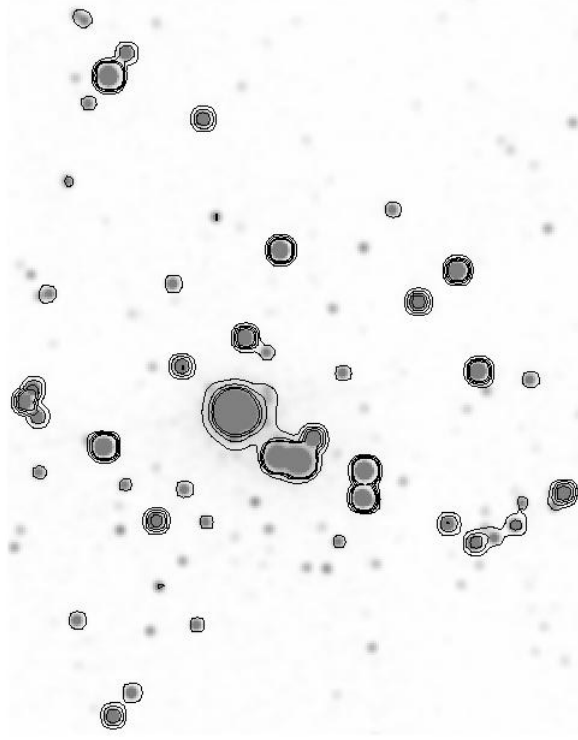


Figura 1. Imagen en rayos X de una parte de la región del Trapecio de Orión. (Obtenida con datos del proyecto Chandra.)

TABLA 1
OBJETOS SELECCIONADOS

Objeto	1	2	3
Desig.	[AD95]3098	Parenago 1837	Sin ref.
Descrip.	Estrella en nebulosa	Estrella en nebulosa	Sin ref.
TE	M0e	K3.5	Sin ref.
$\alpha(J2000)$	5:35:24.48	5:35:15.04	5:35:9.81
$\delta(J2000)$	-5:24:38.92	-5:21:59.42	-5:21:27.81

rotación es apreciable comparada a la rotación de distribuciones esféricas, más aún, en el disco la disipación de energía en forma de radiación es producida principalmente por el rozamiento de las capas diferenciales en rotación. Sin embargo, es de esperar que la rotación sea importante en las regiones interiores cercanas al núcleo en distribuciones esféricas, y que el modelo de disco sea aplicable a las mismas. A continuación describimos a grandes rasgos el modelo de disco semi-delgado y luego la obtención del modelo de disipación a ser utilizado en el ajuste de los datos de Chandra.

El modelo considera dos modificaciones a los modelos usuales de discos delgado y grueso. La primera, que ya se mencionó, es la de trabajar hasta el orden H/R y, la segunda es introducir el efecto de la presión de radiación de la estrella central a través del parámetro $\lambda = 1 - L/L_{cr}$, donde L es la suma de la luminosidad

estelar y la luminosidad del disco, y $L_{cr} = 4\pi cGM/\kappa$, con M como la masa estelar y κ la opacidad media del gas. Se resuelve la ecuación hidrodinámica de movimiento para hallar la velocidad angular $\Omega(R) = \Omega_K(R)\lambda^{1/2}$ [2]—donde Ω_K es la velocidad angular kepleriana— y la velocidad del sonido del gas $c_s(R, H)$. Introduciendo la prescripción α para la viscosidad ($\nu = \alpha c_s H$) en la expresión del torque viscoso [3] [2],

$$g = 2\pi R^3 \nu \sum \frac{\partial}{\partial R} \Omega, \quad (1)$$

donde $\sum$ es la densidad superficial del disco y t es el tiempo, se resuelve la ecuación de difusión:

$$R \frac{\partial}{\partial t} \sum = - \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{2\pi \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial R} g \right], \quad (2)$$

obteniendo la siguiente solución en la aproximación de

viscosidad constante:

$$\Sigma = AR^{-1/4} J_{1/4}(R/R_{ac}) e^{-C\lambda^{1/2}Ht} + B, \quad (3)$$

con A , B y C constantes y

$$R_{ac} = \left(\frac{GM}{\Omega^2(R_{ac})} \right)^{1/3} \quad (4)$$

definido como el radio de acreción usando la forma kepleriana para Ω . La dependencia de la forma $\lambda^{1/2}t$ en el exponente es consecuencia de la misma dependencia con λ hallada para Ω .

A partir de este punto se introduce el modelo de disipación, proponiendo que toda la energía radiante del disco proviene del rozamiento interno entre capas diferenciales contiguas del disco a una dada distancia R . La tasa de disipación por unidad de área de las caras del disco viene entonces dada por [3]:

$$D(R) = \frac{g}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial R} \Omega = \frac{1}{2} \nu \sum (R \frac{\partial}{\partial R} \Omega)^2. \quad (5)$$

Normalizando las variables [2]:

$$r = R/R_{ac}, \quad x = r/r_{ac}, \quad \xi = H/R_{ac} \quad (6)$$

$$\tau = t/t_{ac}, \quad t_{ac} = \frac{\xi_p R_{ac}^2}{3\nu},$$

donde ξ_p es algún valor típico de ξ , se obtiene la expresión normalizada para D :

$$d = \xi \frac{\lambda^{3/2}}{x^3} (x^{-1/4} J_{1/4}(x) e^{-\lambda^{1/2} \xi \tau} + \sigma). \quad (7)$$

Por supuesto, un mejor tratamiento debería considerar la dependencia de la viscosidad ν con R y H .

Finalmente, a fin de que la tasa de disipación d (o D) converja en el origen, surge la necesidad de plantear adicionalmente que la escala de altura, como función de la distancia radial, se comporte como $H(R) \propto R^3$, es decir que, en orden de magnitud, se comporte inversamente proporcional a la densidad del gas. Lo anterior es equivalente a proponer que la columna de densidad vertical del gas se mantenga aproximadamente constante. Con esta aproximación la forma a ser usada en el ajuste es:

$$d = A(x^{-1/4} J_{1/4}(x) e^{-bx^3} + \sigma), \quad x = (r - r_0)/r_{ac}, \quad (8)$$

donde A , b , r_{ac} y σ son constantes y se se ha redefinido x con la inclusión de la constante r_0 para tomar en cuenta posibles desviaciones de la distribución de puntos a ajustar respecto del origen.

A pesar de las varias aproximaciones realizadas y la adición del criterio recién mencionado, la forma obtenida para d muestra ser suficientemente útil en la tarea de ajuste, sobre todo en las regiones cercanas al centro de acreción.

TABLA 2
PARÁMETROS DEL AJUSTE

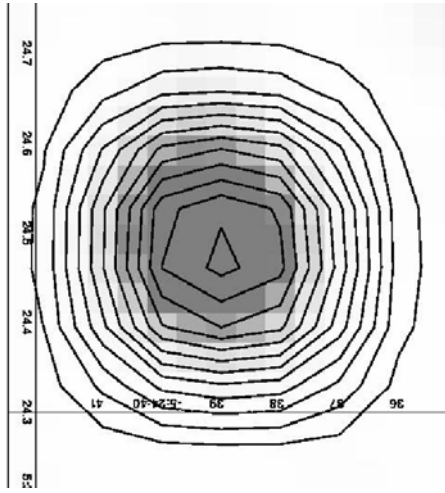
Objeto	1	2	3
r_{ac}	1.2	1.0	1.2
b	0.5	1.0	1.0
A	99	225	172
σ	0	0	0
r_0	0	0	0

4. RESULTADOS

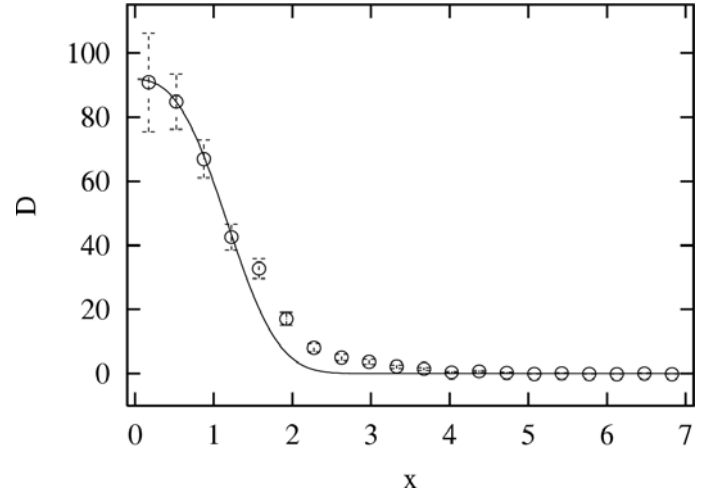
En la obtención del perfil radial de la densidad de brillo superficial se usaron las herramientas de análisis de Chandra (CIAO [4]). Primeramente se seleccionaron veinte regiones anulares concéntricas alrededor del centro brillante de cada uno de los objetos bajo estudio. En la Figura 2 se muestran las imágenes en rayos X de estos tres objetos, junto con los contornos de densidad de brillo. A fin de eliminar el ruido de fondo, se seleccionó también una región anular externa a cada objeto. Se filtraron los datos de los objetos y del fondo a partir del conjunto de datos de toda la región del Trapecio de Orión. Para ello no se realizó ninguna restricción para el rango de energía. A continuación se procedió a la obtención de la densidad de brillo promedio para cada anillo, sustrayendo en cada caso la densidad de brillo promedio del fondo. Como resultado se obtuvo el brillo superficial de cada objeto como función de la distancia radial en unidades de *contajes/pixel*² [4]. Con estos datos se realizó luego el ajuste con el modelo descrito en la sección anterior. Se usó el método Levenberg-Marquardt [5] para el ajuste, obteniendo en cada caso un valor $\chi^2 = 2$ para la función de mérito y valores nulos para las componentes de la matriz de covarianza. Los valores para los parámetros se dan en la Tabla 2 y los gráficos del ajuste en la Figura 2.

5. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

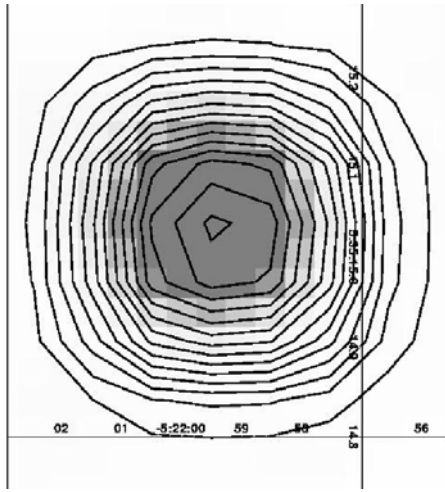
Los resultados para el perfil radial de la densidad de brillo superficial (Figura 2) presentan grandes errores cerca de los núcleos de los objetos. Estos errores, junto con el perfil mismo, van disminuyendo a medida que aumenta la distancia radial. Los ajustes sobre estos perfiles usando el modelo de disco semi-delgado [2] muestran ser aceptables al reproducir aproximadamente la forma del perfil, sobre todo en las regiones cercanas al origen. Los parámetros del ajuste (con un $\chi^2 \simeq 2$) deben ser tomados sólo como estimativos, pues pequeñas desviaciones a los mismos, sin cambiar el orden de magnitud, poseen el mismo valor de χ^2 . El radio de acreción encontrado en los tres casos delimita la región interior en la que se tiene la mayor parte de la emisión en rayos X, y el hecho de que $r_{ac} \approx 1$ indica que no hay una desviación apreciable de la forma kepleriana. A distancias mayores que este radio el



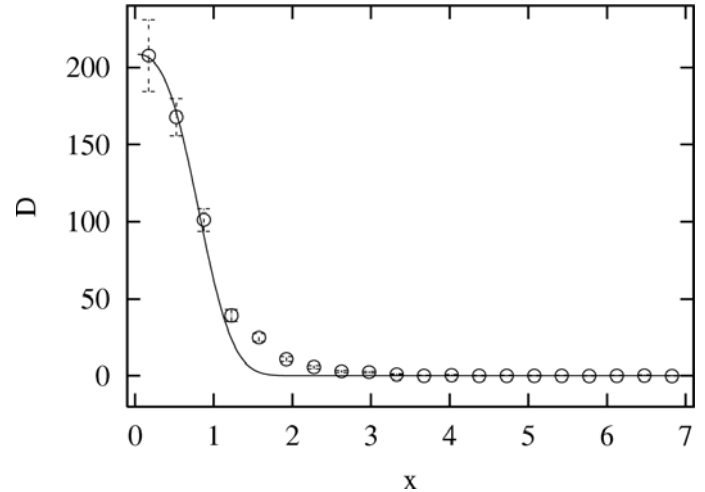
(1.a)



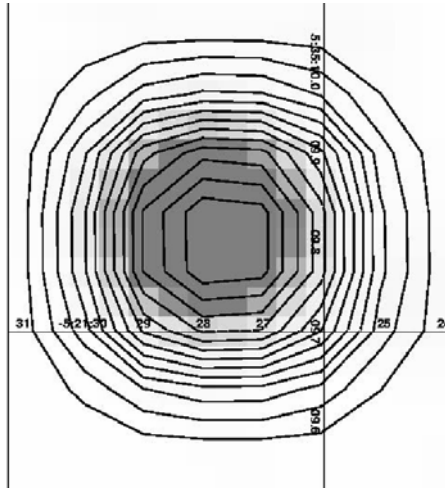
(1.b)



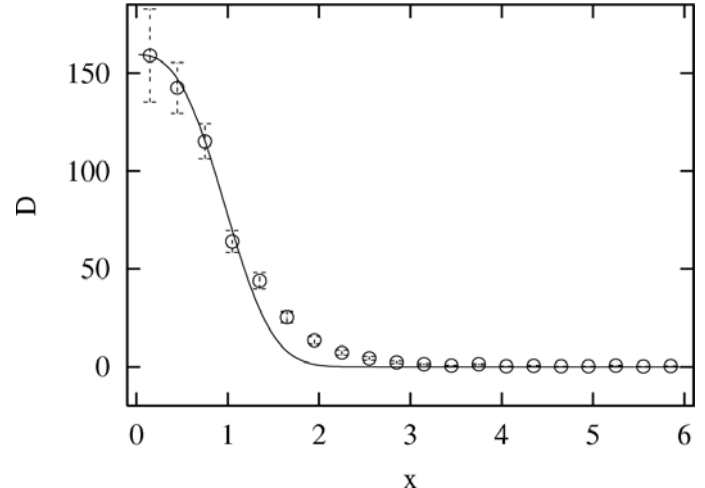
(2.a)



(2.b)



(3.a)



(3.b)

Figura 2. Imágenes en rayos X y ajustes al perfil de densidad de brillo superficial de los tres objetos seleccionados. Los números corresponden a los asignados en la Tabla 1. Las ordenadas en los ajustes (incisos (b)) están en unidades de contajes/pixel^2 . Los curvas en las imágenes (incisos (a)) corresponden a contornos de igual densidad de brillo superficial.

modelo deja de ajustar bien los datos observacionales, y a distancias mayores aun muestra retomar el ajuste de buena manera, pero en este caso sólo porque la densidad de brillo baja notablemente en intensidad. En el ajuste había que decidir entre ajustar mejor los datos cercanos al núcleo, con mayor error, o ajustar de mejor manera la región intermedia. En el segundo caso se produce una disminución notable del máximo de la curva de ajuste cerca del núcleo. Optamos entonces por el primer caso por dos razones: A pesar de los mayores errores en los datos, la mayor parte de la emisión se encuentra en la región cercana al origen, por un lado, y por otro, porque el modelo usado para la curva de ajuste considera que la emisión de radiación es producida por la disipación viscosa en un proceso de acreción, el cual, es más relevante en las regiones interiores al radio de acreción. Aquí se ha adaptado un modelo de disco a objetos que con mayor probabilidad tienen una simetría esferoidal, aparte de que se ha tomado una viscosidad constante en el modelo. Por lo tanto, mejoras al modelo

de ajuste deberían considerar el grado de achatamiento del objeto así como una viscosidad dependiente de la distancia radial. A pesar de todo, y a grandes rasgos, el modelo reproduce los aspectos cualitativos del perfil: una mayor concentración hacia el origen, dentro de una región delimitada por el radio de acreción, y una disminución abrupta del perfil hacia las regiones exteriores.

REFERENCIAS

- [1] <http://chandra.harvard.edu/index.html>
- [2] Ascencio, B., *Fase de Acreción en Presencia del Flujo Radiativo de Estrellas Acretoras* (Tesis de Grado), Septiembre de 2000, Carrera de Física, U.M.S.A., La Paz, Bolivia.
- [3] Frank, J., King, A.R. & Raine, D.J., *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press, 1985.
- Pingle, J.E., *Accretion Disks in Astrophysics*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics 19, 137—162, 1981.
- [4] <http://cxc.harvard.edu/ciao/>
- [5] M.A. Malkov, ApJ, vol.511, L53-L56, 1999.

COLISIÓN DE DOS AGUJEROS NEGROS

V. Subieta y J.A.C. Nogales

Carrera de Física, U.M.S.A.

La Paz - Bolivia

RESUMEN

Se hace una aproximación semianalítica de la colisión frontal de dos agujeros negros, usando una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein dada por Weyl. Esta solución puede ser interpretada como un espacio-tiempo estático, axisimétrico con dos agujeros negros más una singularidad cónica entre ellos. Se encontraron los pseudotensores energía-momento formulados por Tolman y Einstein para esta métrica que describe el sistema y se obtuvieron pseudotensores idénticos, de este resultado, por analogía con el electromagnetismo se dedujo el potencial del sistema, el cual coincide con el potencial de la expansión en la aproximación del campo débil. Con este potencial, las fórmulas de la teoría de radiación gravitatoria y eliminando adiabáticamente la singularidad cónica, la cual se hace depender del tiempo, se halló la tasa de emisión de energía y la cantidad total de energía emitida en ondas gravitatorias durante el proceso de colisión. Los resultados obtenidos mediante esta aproximación están muy de acuerdo a los obtenidos por cálculos numéricos en el contexto de la teoría de la perturbación y a los resultados obtenidos por Araujo y Oliveira en una aproximación semianalítica en la que determinan el potencial del sistema a partir de la fuerza de interacción entre los agujeros negros.

1. INTRODUCCIÓN

Un agujero negro no es un objeto ordinario definido por la cantidad y propiedades del material del cual está hecho, es un objeto del cual ninguna señal física puede escapar, esta totalmente incomunicado del resto del Universo. Como se trata de objetos muy particulares, quizá la colisión de estos parezca un hecho extraordinario, pero no esta lejos de la realidad. Puesto que en el Universo el ochenta por ciento de las estrellas forman sistemas binarios, se espera que agujeros negros de masas estelares, originados siguiendo la evolución estelar típica también formen sistemas binarios, donde los agujeros se hallan orbitando uno alrededor del otro y finalmente por la pérdida de energía en radiación gravitatoria lleguen a caer uno en el otro. De hecho los agujeros negros que han sido indirectamente observados porque se manifiestan por sí mismos emitiendo rayos X se hallan en sistemas binarios donde los objetos se encuentran muy próximos y existe una transferencia de masa [7]. En nuestra galaxia deben existir unas pocas docenas de tales sistemas. Sin embargo, es razonable sospechar que el número de agujeros negros de masas estelares es al menos de 10^7 . Esto basado en la estimación que sólo el uno o dos por ciento de las supernovas forman agujeros negros. Aún el número de agujeros sería mayor considerando los agujeros que quedaron como reliquias de la historia temprana de la galaxia [7].

Las colisiones de agujeros negros masivos también son probables. Se cree que la formación de galaxias ocurre a través de la fusión de unidades más pequeñas [8], si estas unidades tienen sus propios agujeros negros

masivos en el centro, entonces se producirían colisiones de agujeros negros masivos. (Para la detectabilidad y la razón de eventos esperados ver [4])

La importancia del estudio de la colisión de los agujeros negros es debido a que esta considerada como una de las más prometedoras e importantes fuentes astrofísicas detectables de radiación gravitatoria en nuestro universo. En estos años, varios observatorios de ondas gravitatorias (LIGO proyecto en Estados Unidos, VIRGO y GEO en Europa y TAMA en Japón [4] [5]) están siendo concluidos y tendrán la capacidad y sensibilidad suficiente para detectar las ondas gravitatorias provenientes de colisiones de agujeros negros. La información ganada de la detección de las ondas permitirá además de una reconstrucción de los parámetros astrofísicos del sistema, la primera directa e inequívoca evidencia de la existencia de estos objetos, además que a la vez servirá para corroborar la teoría de la relatividad general.

Debido a esta gran importancia ya se realizaron muchos trabajos tratando la colisión de agujeros negros. El problema dinámico de dos cuerpos es uno de los más complejos en relatividad general, no existen soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein describiendo la geometría del espacio-tiempo para estas configuraciones, es por esto que el problema ha sido tratado principalmente por métodos numéricos y por aproximaciones post-Newtonianas.

Araujo y Oliveira [1] hicieron una aproximación semianalítica de la colisión frontal de dos agujeros negros, usando una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein dada por Weyl en 1917. Ésta solución puede

ser interpretada como un espacio-tiempo estático, axisimétrico con dos agujeros negros más una singularidad cónica entre ellos. De la singularidad cónica calcularon la fuerza de interacción entre los agujeros y obtuvieron el potencial del sistema.

En este trabajo se usa esta misma solución exacta de Weyl y se encuentran para ésta los pseudotensores energía-momento formulados por Einstein y Tolman (este último además es equivalente al pseudotensor formulado por Moller [6]) que resultan ser idénticos. De este resultado por analogía con el electromagnetismo se deduce el potencial del sistema el que además coincide con el potencial de la expansión en la aproximación del campo débil.

Con este potencial, las fórmulas de la teoría de radiación gravitatoria y eliminando adiabáticamente la singularidad cónica, haciendo depender la distancia entre los agujeros del tiempo, se halló la tasa de emisión de energía y la cantidad total de energía emitida en ondas gravitatorias durante el proceso de colisión.

En la sección 2 de este trabajo se presenta esta solución exacta de Weyl que describe a los dos agujeros negros con una singularidad cónica entre ellos. En la sección 3. se deduce el potencial del sistema a partir de los resultados de los pseudotensores energía-momento para esta solución de Weyl. En la sección 4 se determina la energía radiada durante el proceso de colisión usando la fórmula de luminosidad obtenida de la teoría de la radiación gravitatoria y el potencial que se había deducido y finalmente en la sección 5 se discuten los resultados.

2. LA MÉTRICA DE WEYL

A pesar de la dificultad de las ecuaciones de campo de Einstein, porque son no lineales, el año 1917 Weyl publicó una de las primeras soluciones exactas. Esta solución es un caso particular de la clase de espacio-tiempo estático y axisimétrico, conocido hoy en día como la clase de Weyl.

El elemento de línea de un espacio-tiempo estático y axisimétrico, en coordenadas cilíndricas esta dado por:

$$ds^2 = e^{2\Psi} dt^2 - e^{-2\Psi} [e^{2\nu} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (1)$$

donde $\Psi = \Psi(\rho, z)$, $\nu = \nu(\rho, z)$, $0 < \rho < \infty$, $-\infty < z < \infty$ y $0 < \phi < 2\pi$. Las ecuaciones de campo de Einstein obtenidas para esta métrica son:

$$\nabla^2 \Psi \equiv \Psi_{\rho\rho} + \frac{\Psi_\rho}{\rho} + \Psi_{zz} = 0, \quad (2)$$

$$\nu_\rho = \rho(\Psi_\rho^2 - \Psi_z^2), \quad (3)$$

$$\nu_z = 2\rho\Psi_\rho\Psi_z. \quad (4)$$

Se puede demostrar que hay una solución particular para estas ecuaciones de campo isométrica a la solución de Schwarzschild que describe un agujero negro. Esto significa que para una solución particular de Weyl, haciendo una transformación de coordenadas la métrica de Weyl decae en la métrica de Schwarzschild. Es decir

que la solución de un agujero negro esta incluida en las soluciones de Weyl.

Se puede verificar directamente que una solución a la ecuación de Laplace (2) es el potencial Newtoniano para una barra finita de longitud L localizada en el eje z y centrada en el origen:

$$\Psi = \frac{M}{L} \ln \left[\frac{R_+ + R_- - L}{R_+ + R_- + L} \right], \quad (5)$$

donde

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \mp \frac{L}{2})^2} \quad (6)$$

y M es la masa de la barra Newtoniana, expresada en unidades de longitud. La solución correspondiente a (3) y (4) usando la ecuación (5) es:

$$\nu = 2 \left(\frac{M}{L} \right)^2 \ln \left[\frac{(R_+ + R_-)^2 - L^2}{4R_+ R_-} \right]. \quad (7)$$

Haciendo $L = 2M$ y desarrollando la transformación de coordenadas cilíndricas a esféricas:

$$\rho^2 = (r^2 - Lr) \sin^2 \theta, \quad (8)$$

$$z = \left(r - \frac{L}{2} \right) \cos \theta, \quad (9)$$

el elemento de línea decae en el elemento de línea de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (10)$$

Nótese que en coordenadas cilíndricas el horizonte de eventos esta dado por $\rho = 0$, $-M \leq z \leq M$.

Como la ecuación de Laplace (2) es lineal, uno puede superponer soluciones, cada una de ellas correspondiente al potencial de una barra Newtoniana, una vez que se hace esto se pueden resolver las ecuaciones (3) y (4) para obtener lo que puede interpretarse como *una solución de dos agujeros negros*.

Veamos como se hace esto: Se designan las masas de las dos barras Newtonianas como M y M' de longitudes $2M$ y $2M'$, además las barras están situadas sobre el eje z y centradas en $Z_0 + M$ y $-Z_0 - M'$ respectivamente.

La solución a la ecuación (2) para esta configuración esta dada por:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R_+ + R_- - 2M}{R_+ + R_- + 2M} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R'_+ + R'_- - 2M'}{R'_+ + R'_- + 2M'} \right], \quad (11)$$

donde

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z - (Z_0 + M) \mp M]^2}, \quad (12)$$

$$R'_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z + (Z_0 + M') \mp M']^2}. \quad (13)$$

La solución de la función $\nu(\rho, z)$ correspondiente a esta solución Ψ esta dada por:

$$\nu = \nu[\Psi] + \nu[\Psi'] + 2\sigma[\Psi, \Psi'], \quad (14)$$

donde Ψ , $\nu[\Psi]$ y Ψ' , $\nu[\Psi']$ son soluciones al problema de un solo agujero y el término de interacción σ esta dado por [1]:

$$\begin{aligned} \sigma[\Psi, \Psi'] = & \\ & \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(M' + Z_0) R_+ + (M + M' + Z_0) R_- - M R'_-}{Z_0 R_+ + (M + Z_0) R_- - M R'_+} \right] \\ & + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{Z_0}{Z_0 + M'} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Con esta solución se describe el espacio-tiempo debido a un sistema de dos agujeros negros en un eje de simetría, entonces surge la pregunta ¿por qué los dos cuerpos están estáticos, sin interactuar aparentemente entre ellos?. Otra solución exacta a la clase de Weyl, la solución de Curzon ya había causado controversia por la misma razón en 1924, incluso algunos físicos de la época señalaron que la teoría de la Relatividad General era incorrecta. Pero Einstein y Rozen resolvieron la paradoja mostrando que la solución de Curzon no tiene un vacío entre los dos cuerpos porque hay un deficit de ángulo cuando uno da una vuelta alrededor del eje de simetría en un plano perpendicular a la línea que une los dos cuerpos. Así en la Relatividad General, un sistema de dos cuerpos en equilibrio estático debe tener una clase de riostra entre ellos que los mantiene separados.

Para esta solución particular de Weyl ocurre que cuando $\rho = 0$ el término de interacción no desaparece entre las dos barras siendo éste:

$$\nu(0, z) = 2\sigma(0, z) = \ln \left[1 - \frac{MM'}{(Z_0 + M)(Z_0 + M')} \right] \quad (16)$$

para $|z| < Z_0$. Este término genera una singularidad cónica [1] la cual puede ser interpretada como una cuerda cósmica que mantiene los dos cuerpos apartados.

3. DETERMINACIÓN DEL POTENCIAL DEL SISTEMA

El potencial se deduce del resultado del pseudotensor energía-momento en la prescripción de Tolman (la formulación del pseudotensor de Tolman es además equivalente a la formulación del pseudotensor de Moller [6]) y de Einstein

El pseudotensor de Einstein esta definido como

$$\Theta_b^a = h_{b,c}^{ac}, \quad (17)$$

donde

$$h_b^{ac} = -h_b^{ca} = \frac{g_{bi}}{16\pi\sqrt{-g}} [(-g)(g^{ai}g^{cj} - g^{ci}g^{aj})]_{,j} \quad (18)$$

y el pseudotensor de Tolman esta definido como

$$T_k^i = \frac{1}{8\pi} U_{k,j}^{ij}, \quad (19)$$

donde

$$U_k^{ij} = \sqrt{-g} \left[-g^{li} \left(-\Gamma_{kl}^j + \frac{1}{2} g_k^j \Gamma_{al}^a + \frac{1}{2} g_l^j \Gamma_{ak}^a \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} g_k^i g^{lm} \left(-\Gamma_{lm}^j + \frac{1}{2} g_l^j \Gamma_{am}^a + \frac{1}{2} g_m^j \Gamma_{al}^a \right) \right]. \quad (20)$$

Se obtuvieron resultados idénticos de estos dos pseudotensores para la métrica de Weyl. La componente $T_0^0 = \theta_0^0$ está dada por:

$$T_0^0 = -\frac{1}{8\pi} (2\Psi_\rho - \nu_\rho - \rho\nu_{\rho\rho} + 2\rho\Psi_{\rho\rho} - \rho\nu_{zz} + 2\rho\Psi_{zz}), \quad (21)$$

la cual puede ser simplificada con las ecuaciones de campo de Einstein (2), (3) y (4) y resulta finalmente:

$$T_0^0 = \frac{\rho}{4\pi} \Psi_z^2. \quad (22)$$

Es de interés la componente T_0^0 pues es la que da el valor de la energía gravitatoria por unidad de volumen y tiempo, las otras componentes corresponden a la densidad de momento.

El potencial del sistema estudiado puede ser determinado de este último resultado que describe el flujo de energía del sistema y de los principios de la física general. Existen muchas analogías entre la teoría electromagnética y la teoría de la relatividad general, ambas teorías tienen soluciones radiativas por ejemplo, y en muchos casos se usan estas similitudes para analizar y derivar propiedades en la relatividad general. En electromagnetismo y generalmente, en las teorías clásicas de campos, el flujo de energía es proporcional al cuadrado del gradiente del potencial, aplicando esta regla a la ecuación de flujo de energía (22) obtenida, se podría concluir que el potencial del sistema es la función Ψ . La aproximación a campos gravitatorios débiles confirma esta asunción.

4. DETERMINACIÓN DE LA ENERGÍA RADIADA

De la fórmula de luminosidad deducida en la teoría de radiación gravitatoria [3]:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \left\langle \dot{l}_{ij} \dot{l}^{ij} \right\rangle, \quad (23)$$

vemos que necesitamos los tensores de inercia. Como la colisión es frontal, asumimos que el movimiento es completamente a lo largo del eje x. Escogemos el centro de masa en reposo en $x = 0$ x_1 y x_2 serán las posiciones de cada uno de los agujeros y M y M' sus respectivas masas. Se hacen las siguientes definiciones:

$$x \equiv x_1 - x_2, \quad \mu \equiv \frac{MM'}{m}, \quad m \equiv M + M'. \quad (24)$$

Se tiene entonces que la energía radiada queda reducida a:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8}{15} \mu^2 (3\dot{x}\ddot{x} + x\ddot{x}^2), \quad (25)$$

donde los puntos denotan derivadas temporales.

Por otra parte la energía potencial definida por la función Ψ desde el centro de masas queda reducida a:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{Z_0^2}{(Z_0 + 2M)(Z_0 + 2M')} \right]. \quad (26)$$

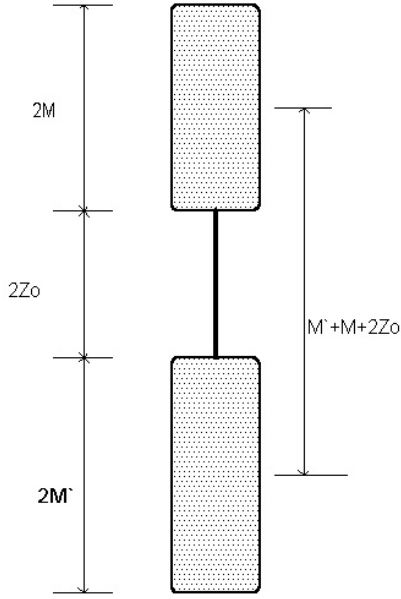


Figura 1. Relación de la distancia de separación de los horizontes de eventos de los dos agujeros y la distancia entre los centros de masas de los dos agujeros negros.

La distancia $2Z_0$ es la distancia de separación entre los horizontes de eventos de los dos agujeros, pero consideramos la distancia de separación entre los dos centros de masas de los agujeros negros a la cual ya llamamos antes x , la relación entre estas dos variables está dada por la ecuación (ver figura 1):

$$x = 2Z_0 + M + M'. \quad (27)$$

Ahora se hace un reescalamiento del espacio-tiempo a una forma apropiada, haciendo $M + M' = 1$, de esta forma la masa reducida es $\mu = MM'$, o en términos del factor de proporcionalidad entre las dos masas a ($a = M/M'$),

$$\mu = \frac{a}{(a+1)^2}. \quad (28)$$

Nótese que para cualquier valor que tome a , μ estará siempre entre los límites de 0 y $1/4$.

Con este reescalamiento y en función de x la energía potencial es:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3 + 16\mu} \right]. \quad (29)$$

Entonces la conservación de la energía estará dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3 + 16\mu} \right] = \epsilon \quad (30)$$

(donde ϵ es la energía total del sistema).

Con la ayuda de esta última ecuación de movimiento calculamos $\dot{x}$, $\ddot{x}$ y $\ddot{\dot{x}}$ con estas cantidades en la ecuación

(25) y considerando que se tiene interés en el proceso de colisión (esto significa lo que ocurre cuando x decrece con el tiempo), se calculará la variación de la energía no con el tiempo sino con la distancia de separación de los dos agujeros x , haciendo uso de la siguiente igualdad:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dt} \frac{1}{\dot{x}}. \quad (31)$$

Al hacer esta distancia entre los agujeros dependiente del tiempo, eliminamos adiabáticamente la singularidad cónica.

Finalmente se tiene que la tasa de la energía radiada en el proceso de colisión es

$$\frac{dE}{dx} = \frac{32}{15} \mu^2 \sqrt{2\epsilon - \ln \left(\frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x - 3 + 16\mu} \right)} \times \frac{(x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 22x - 9 + \alpha\mu + \beta\mu^2)^2}{(x-1)^4 (x^2 + 2x - 3 + 16\mu)^4}, \quad (32)$$

$$\alpha = 56x^2 - 176x + 120, \quad \beta = 256x - 384.$$

Nótese que $\frac{dE}{dx}$ diverge cuando $x \rightarrow 1$, esto ocurre cuando los horizontes de eventos de los dos agujeros negros se tocan. Pero cerca de este límite, el usar el potencial hallado sobre la base de la métrica de Weyl, deja de ser válido. Ocurre que cuando los dos agujeros negros se encuentran muy cerca el uno del otro, sufren grandes distorsiones en sus horizontes de eventos y la métrica de Weyl ya no describirá el sistema correctamente.

La tasa de energía radiada depende de la masa reducida μ que indica la proporción de las masas de los agujeros negros y la energía total del sistema que es determinada a partir de la separación inicial x_{max} de los agujeros negros cuando estos se encontraban en reposo, a partir de la ecuación

$$\epsilon = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x_{max}^2 - 2x_{max} + 1}{x_{max}^2 + 2x_{max} - 3 + 16\mu} \right]. \quad (33)$$

La cantidad total de energía radiada en ondas gravitatorias estará dada por

$$\Delta E_{(x_{max}, x_{min})} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dE}{dx} dx. \quad (34)$$

Aquí x_{max} es la distancia entre los agujeros desde la cual se inicia la colisión. Como ya dijimos antes la aproximación que realizamos para describir la colisión pierde sentido cuando los agujeros están muy cerca. Entonces se debe escoger x_{min} adecuadamente. Lo que usualmente se hace es escoger la distancia a la que los agujeros han alcanzado la velocidad de la luz x_{luz} cuando se encontraban inicialmente en reposo en el infinito. En este caso este punto está determinado por la solución a la siguiente ecuación trascendental:

$$\frac{x_{luz}^2 + 2x_{luz} - 3 + 16\mu}{x_{luz}^2 - 2x_{luz} + 1} = e. \quad (35)$$

TABLA 1

Cantidad total de energía gravitatoria radiada como una función de x_{max} , para dos valores distintos de μ (cuando las masas son iguales $\mu = 1/4$ y cuando una de las masas es aproximadamente 6 veces mayor $\mu = 1/6$). El valor de x_{min} usado es indicado entre corchetes. Los valores son comparados a los resultados obtenidos en la aproximación newtoniana, los resultados numéricos obtenidos por NCSA [2] y a los obtenidos por Araujo [1] en una aproximación semianalítica.

x	$\mu = \frac{1}{4} \Delta E[4.083]$	$\mu = \frac{1}{256} \Delta E[3.869]$	$\Delta E_{New}[2]$	$\Delta E_{NCSA}[2]$	$\Delta E_{Araujo}[2.1640]$
∞	0.00816	0.01198	0.01905	0.00894	0.00909
100	0.00792	0.01164	0.01878	0.00874	0.00895
30	0.00733	0.01082	0.01765	0.00831	0.00860
20	0.00687	0.01021	0.01610	0.00801	0.00833
10	0.00524	0.00821	0.01463	0.00715	0.00746
7	0.00359	0.00629	0.01244	0.00654	0.00662
5	0.00126	0.00502	0.00649	0.00582	0.00535

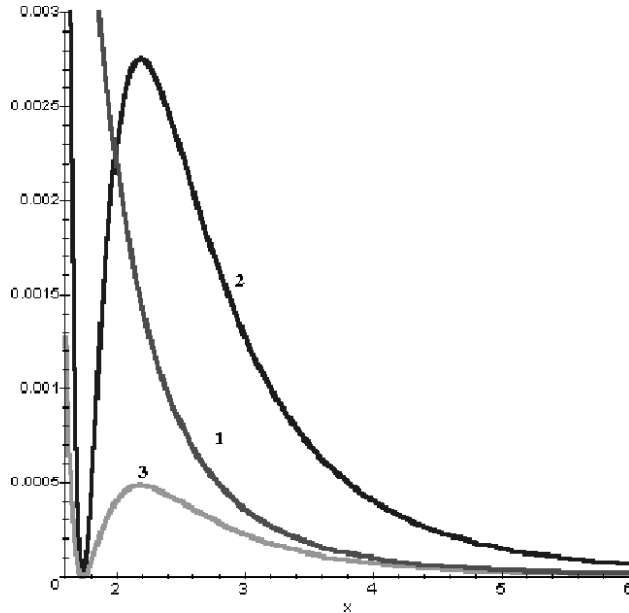


Figura 2. Comparación de la tasa de emisión de energía en forma de ondas gravitatorias para $\mu = 1/8$ y $x_{max} = \infty$ la obtenida en la aproximación Newtoniana (línea 1); la obtenida por Araujo y Oliveira [1] en una aproximación relativista en la que se determina el potencial a partir de la fuerza de interacción entre los dos agujeros (línea 3) y la obtenida en este trabajo con el potencial determinado a partir de la métrica de Weyl (línea 2) .

Nótese que este punto nuevamente depende de μ es decir de la proporción entre las masas de los dos agujeros negros y toma el valor máximo $x_{luz} = 4.083$ cuando los agujeros tienen masas iguales o $\mu = \frac{1}{4}$ y tiene como valor límite $x_{luz} = 3.04$ cuando μ tiende a cero, esto es cuando uno de los agujeros es mucho más grande que el otro.

En la Tabla 1 se presentan resultados de energías totales obtenidas para distintas posiciones iniciales y para dos valores de μ muy diferentes, $\mu = 1/4$ cuando los

dos agujeros tienen masas iguales y $\mu = 1/256$ cuando uno de los agujeros tiene aproximadamente 256 veces la masa del otro. En esta tabla también se expresan los resultados obtenidos mediante otros métodos.

5. CONCLUSIONES

- Los pseudotensores de Einstein y Tolman (por tanto también de Moller [6]) para la métrica de Weyl que describe el sistema de los dos agujeros negros y la singularidad cónica entre ellos resultan ser iguales.
- Del resultado de los pseudotensores energía-momento se identificó la energía potencial del sistema: la función $\Psi(\rho, z)$.
- Este potencial depende de la proporción entre las masas, determinada por μ (ecuación 29) pero si la diferencia entre las masas es muy grande, esta dependencia se desvanece.
- El comportamiento de la tasa de energía radiada obtenida usando este potencial es similar al obtenido en la aproximación de la colisión de agujeros negros realizada por Araujo y Oliveira ¹ [1], pero es muy diferente del obtenido mediante una aproximación newtoniana (ver figura 2). Se tiene que la tasa de la energía presenta un pico máximo de radiación y diverge para $x = 1$ lo mismo ocurre en el caso de Araujo y Oliveira, en la aproximación newtoniana se tiene que la tasa de energía crece indefinidamente cuando la separación entre los dos agujeros decrece y esta diverge para $x = 0$. La tasa de energía radiada en el caso considerado es mayor a la de Araujo y Oliveira, porque en el potencial escogido se considera la energía potencial de todo el sistema, es decir, además de la fuerza de interacción esta incluida la

¹ Araujo y Oliveira realizaron también una aproximación relativista en la que calculan la energía potencial del sistema a partir de la fuerza de interacción entre los dos agujeros negros, calculada también a partir de la métrica de Weyl.

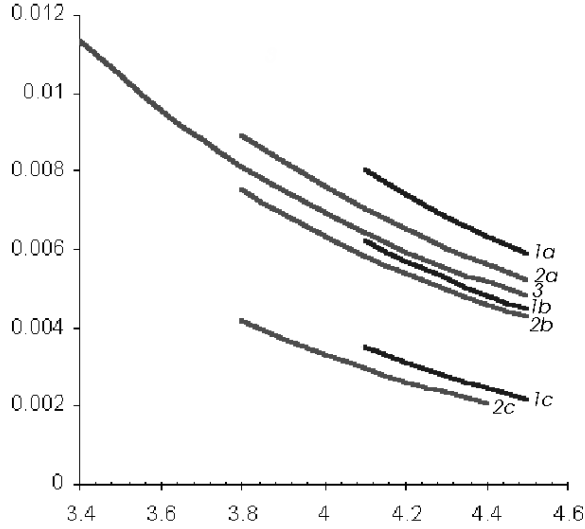


Figura 3. Energía total radiada como función de x_{min} , para distintos valores de μ y para distintos valores de x_{max} . Las curvas 1a, 1b y 1c corresponden a $\mu = 1/4$ (masas iguales), las curvas 2a, 2b y 2c a $\mu = 1/8$ (una masa es aproximadamente 6 veces la otra) y la curva 3 a $\mu = 1/256$ (una masa es aproximadamente 254 veces la otra). Para $\mu = 1/8$ y $1/4$ se graficaron tres x_{max} , estos son ∞ , 20 y 7 que corresponden a las curvas superior, del medio e inferior respectivamente, y para $\mu = 1/256$ se gráfico $x_{max} = \infty$

energía del campo gravitatorio debido a los propios agujeros negros, a diferencia de lo que ocurre en el caso de Araujo y Oliveira.

- La energía total radiada en ondas gravitatorias usando otras aproximaciones y métodos puede ser escrita como un factor de proporcionalidad constante por la masa reducida: $\Delta E = A\mu^2$, pero en nuestro caso, debido a que el potencial depende de μ , este factor “A” no es constante, más bien es una función de μ ; se tiene entonces $\Delta E = A(\mu)\mu^2$. Debido a esto cuando se tienen valores de μ cercanos a $1/4$ (colisiones de agujeros de masas similares), se pueden tener energías totales emitidas muy diferentes para valores de μ un poco diferentes (ver la figura 3):
- La distancia de separación a la que los agujeros negros alcanzan la velocidad de la luz x_{luz} cuando inician su movimiento desde el infinito, depende de

μ . x_{luz} crece cuando las masas entre los agujeros son más similares hasta llegar a 4.08 para agujeros de masas iguales, y decrece cuando son menos similares hasta el límite de 3.34.

- Los valores para la energía total radiada dependen entonces de la masa reducida μ , es decir de la proporción entre las masas de los agujeros, de x_{max} y dependen fuertemente de x_{min} que se escoja (ver la figura 3). Debido a todas estas variables se puede tener una misma energía para distintas características del sistema.
- Se han calculado energías totales emitidas tomando como $x_{min} = x_{luz}$ ver la Tabla 1. Cuando la separación inicial de los agujeros es muy grande, los resultados están extremadamente de acuerdo con los valores calculados mediante otros métodos relativistas [1] y simulaciones computacionales, [2]. Cuando las distancias iniciales son menores los resultados decrecen más rápido que en los otros métodos cuando los agujeros negros son de masas iguales ($\mu = 1/4$), pero cuando los dos agujeros son de masas muy diferentes ($\mu = 1/256$) las energías siguen estando muy de acuerdo con las energías calculadas mediante el método numérico por Anninos.

REFERENCIAS

- [1] Araujo, M., Oliveira, S. 1994 *Static axisymmetric approach for the head-on collision of two black holes*, Physical Review, 52, 1995
- [2] Anninos, P., Hobill, D., Siedel, E., Smarr, L., y Suen, W. 1994 *The Head-On Collision of Two Equal Mass Black Holes*, NCSA report No. 048
- [3] Schutz, B. 1985, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press
- [4] Thorne, K. 1998 *Probing Black Holes and Relativistic Stars with Gravitational Waves*, Black holes and Relativistic Stars. Edited by Robert Wald. The University of Chicago Press
- [5] Barish, B., Weiss, R. 1999 *Ligo and the detection of gravitational waves* Physics Today, October 1999.
- [6] Florides, P. S., The equivalence of the Tolman and the Moller Mass-Energy Formulae in General Relativity, 1994, Plenum Publishing Corporation.
- [7] Martin J. Rees, V. 1998 *Astrophysical Evidence for Black Holes*, Black holes and Relativistic Stars. Edited by Robert Wald. The University of Chicago Press
- [8] Schutz, B., 2000 *Gravitational Radiation*, gr-qc/0003069

PÉNDULO IMPULSADO

Juliana Timotheo da Costa Pardal¹

Klauko Pinheiro Mota²

Paulo Murilo Castro de Oliveira³

*Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense
Campus da Praia Vermelha, Av. Litorânea s/n, Boa Viagem
Niterói, RJ, 24210-340, Brazil*

RESUMEN

Los modos normales de oscilación de un péndulo simple (rígido) forman una banda **continua** de frecuencias, ya que el periodo depende de la amplitud de oscilación. El periodo mínimo T_0 corresponde a pequeñas oscilaciones y cualquier periodo $T > T_0$ puede ser fijado escogiendo una amplitud apropiada $\theta_0(T)$. En el presente trabajo, estudiamos el comportamiento de resonancia de este sistema cuando se encuentra forzado por repetidos impulsos externos dados por golpes con periodo $T > T_0$. También incluimos un termino disipativo y las ecuaciones de movimiento son resueltas numericamente. Para golpes de poca intensidad, el sistema entra en resonancia y oscila de acuerdo al periodo externo. Cuando incrementamos la intensidad de los golpes, observamos la aparición de una cascada de duplicación de periodos que sigue la ruta del caos de Feigenbaum.

1. INTRODUCCIÓN

Algunos sistemas simples presentan comportamientos sorprendentes. El presente trabajo muestra una situación de este tipo, concerniente a un péndulo simple. Consideramos una barra rígida, sin masa, de tamaño ℓ , con una masa puntual en un extremo y el otro sujeto a un eje horizontal sin fricción, que permite que la barra oscile en un plano vertical por efecto de la fuerza de gravedad terrestre. Para poder obtener la posición $\theta(t)$ como función del tiempo t , que representa el ángulo relativo a la posición vertical de equilibrio, necesitamos resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta, \quad (1)$$

para una condición inicial dada; por ejemplo, podemos escoger una posición inicial θ_0 (amplitud) sin velocidad inicial. En el límite de pequeñas amplitudes, para las cuales $\sin(\theta)$ puede ser remplazado por el mismo ángulo θ , este es un ejercicio trivial, que generalmente se resuelve en los cursos básicos de física. En este caso, el movimiento corresponde a oscilaciones armonicas simples con un periodo dado por (para pequeñas amplitudes):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad |\theta_0| \ll 1. \quad (2)$$

Mas allá de este límite, la solución analítica de la ecuación (1) no es simple. De hecho, la Figura (1a) muestra algunos gráficos experimentales para diferentes amplitudes. Cuanto más grande es la amplitud, los gráficos

difieren más de una curva sinusoidal: el péndulo ya no es un oscilador armonico simple.

2. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Teóricamente, una alternativa es resolver la ecuación (1) de forma numérica, por ejemplo, reemplazando la segunda derivada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cong \frac{\theta_{t+1} - 2\theta_t + \theta_{t-1}}{\Delta t^2}, \quad (3)$$

donde el tiempo $t = 1, 2, 3, \dots$ es ahora una variable discreta, que corresponde a instantes separados por incrementos iguales de tiempo Δt . Podemos obtener cualquier precisión numérica predefinida, escogiendo apropiadamente un valor suficientemente pequeño de Δt para estos intervalos. En este sentido, la solución numérica

$$\theta_{t+1} = 2\theta_t - \theta_{t-1} - K \sin \theta_t, \quad (4)$$

donde $K = g\Delta t^2/\ell$ es exacta. Comenzamos con una amplitud dada θ_0 en $t = 0$ y fijamos $\theta_1 = \theta_0 - (K/2) \sin \theta_0$, que corresponde a una velocidad inicial nula. Para $t = 1$, la ecuación (4) nos proporciona θ_2 . Para $t = 2$, la misma ecuación (4) nos proporciona θ_3 , y así sucesivamente. La Figura (1b) muestra algunos gráficos obtenidos usando esta solución numérica para diferentes amplitudes, que pueden ser comparados con los gráficos experimentales de la Figura (1a). En realidad, nuestro péndulo experimental es una barra rígida sin una masa extra en el extremo oscilante. En este caso, $\ell = 23.2\text{cm}$ corresponde a su tamaño efectivo $\ell = G^2/d$, donde G es el radio de giro y d es la distancia entre el eje de rotación y el centro de masa. Nosotros adoptamos el mismo valor $\ell = 23.3\text{cm}$,

¹Email: juliana@if.uff.br

²Email: klauko@if.uff.br

³Email: pmco@if.uff.br

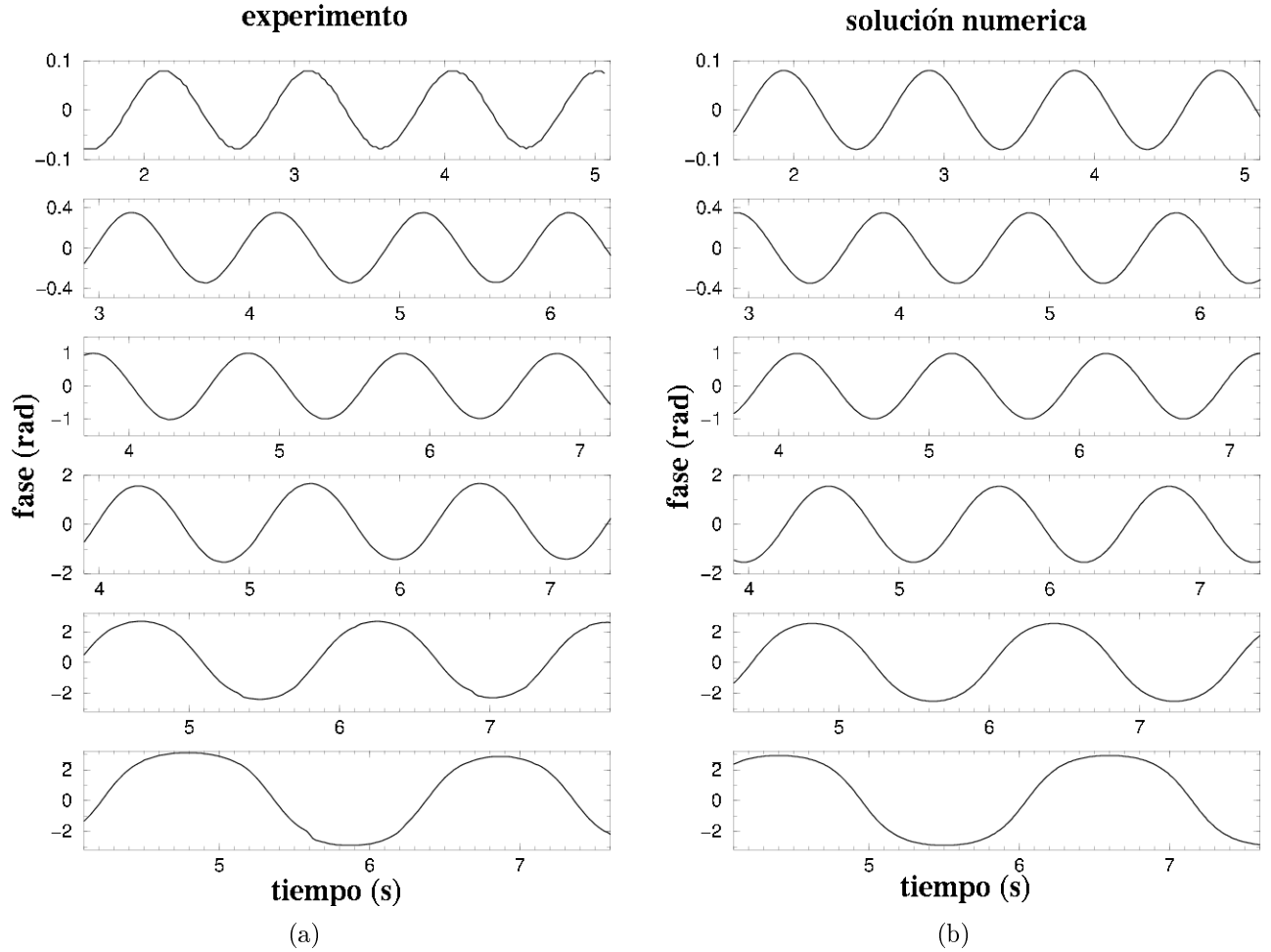


Figura 1. Posición $\theta(t)$ de un péndulo simple como función del tiempo para diferentes amplitudes (note las diferentes escalas verticales): experimentos (a) y soluciones numéricas (b).

con $g = 9.81\text{m/s}^2$ y $\Delta t = 0.01$ para nuestra solución numérica mostrada en la Figura (1b).

Nótese que en la Figura (1a), cuanto más grande es la amplitud, más grande es el periodo. Usando las soluciones numéricas, podemos medir el periodo de cada amplitud. La Figura (2) muestra el resultado $T(\theta_0)$ de estas medidas. Este gráfico es universal, es decir, que se mantiene idéntico para cualquier valor de ℓ , con T/T_0 a lo largo del eje vertical. La elección de cada valor de ℓ significa que **cualquier** periodo T mayor que T_0 puede ser alcanzado, escogiendo la amplitud apropiada $\theta_0(T)$. Debido a su banda **continua** de frecuencias, este sistema simple es una herramienta muy conveniente para experimentos de resonancia y sincronización.

3. PÉNDULO IMPULSADO

Ahora vamos a tratar el péndulo simple desde otro punto de vista, simplemente invirtiendo nuestro razonamiento. En lugar de fijar la amplitud para obtener una frecuencia dada, podemos **forzar** al péndulo a oscilar de acuerdo a un cierto periodo T (mayor que T_0). Decidimos fijar T golpeando el péndulo con una in-

tensidad proporcional a $\Delta\theta$, que hace el papel de un parámetro de control. Una secuencia de golpes impulsantes son repetidos en intervalos T . Inmediatamente después de cada golpe, al valor actual de θ_t es instantáneamente cambiado a $\theta_t + \Delta\theta$. También incluimos un término disipativo de baja intensidad, que permite al sistema liberar la energía excedente proporcionada por los golpes periódicos. Hemos escogido una fricción viscosa proporcional a la velocidad actual. Incluyendo estos dos nuevos ingredientes, golpes y fricción, la solución numérica está dada por:

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \lambda(\theta_t - \theta_{t-1} - K \sin \theta_t) \quad (5)$$

y

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \Delta\theta \quad (6)$$

siempre que $t \bmod (T/\Delta t) = 0$. Se escoge T como un entero múltiplo de Δt , que es el menor paso de tiempo adoptado para transformar el tiempo t en una variable discreta. Además, $\lambda < 1$ es una constante (digamos, $\lambda = 0.99$) que toma en cuenta la fricción viscosa. La condición inicial es nuevamente irrelevante. Iteramos

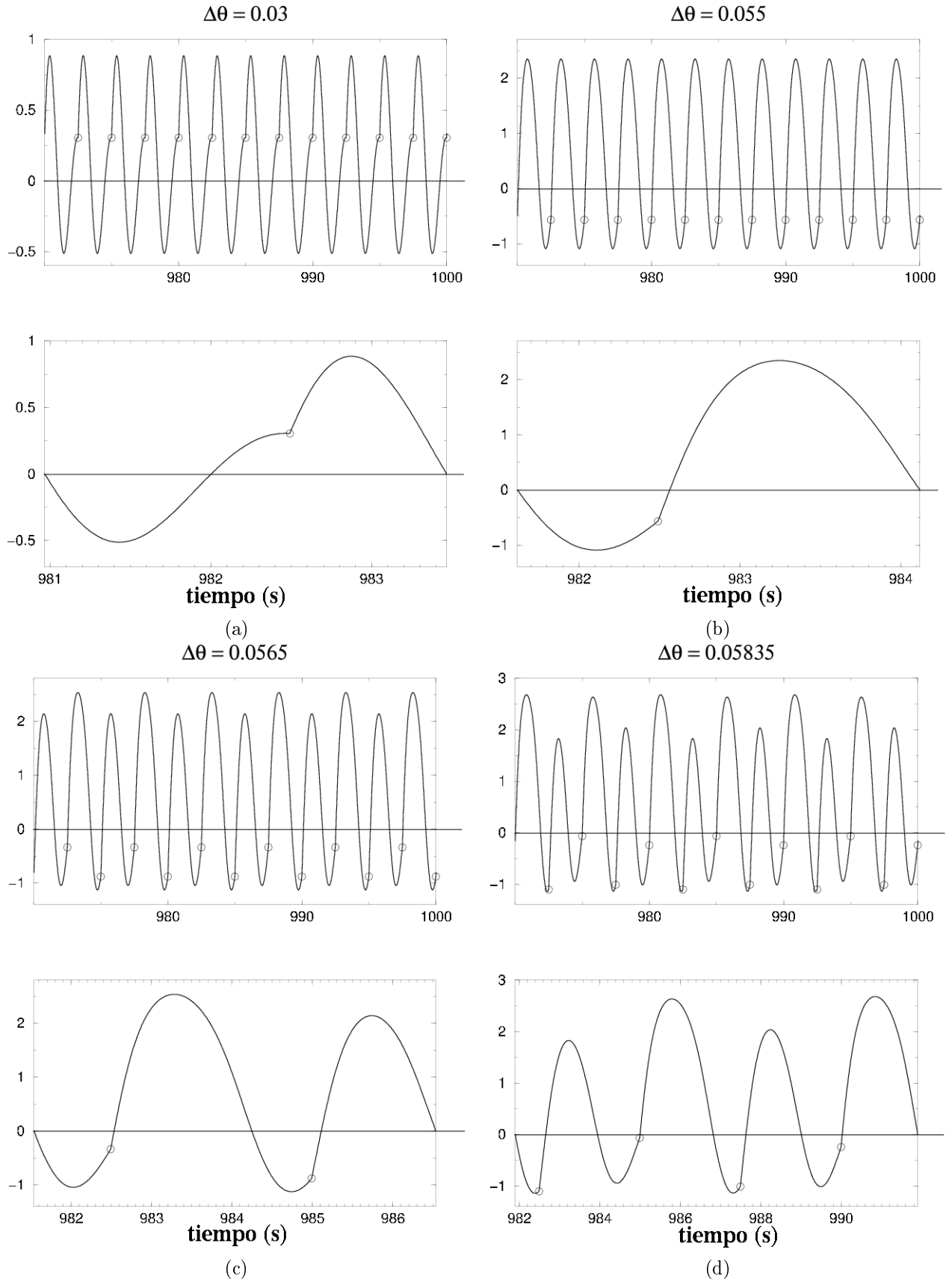


Figura 3. Posición $\theta(t)$ del péndulo impulsado, para diferentes valores de la intensidad del golpe $\Delta\theta$. El periodo impuesto externamente es $T = 2.5s \cong 1.25T_0$. En cada caso, el detalle inferior muestra sólo un periodo completo.

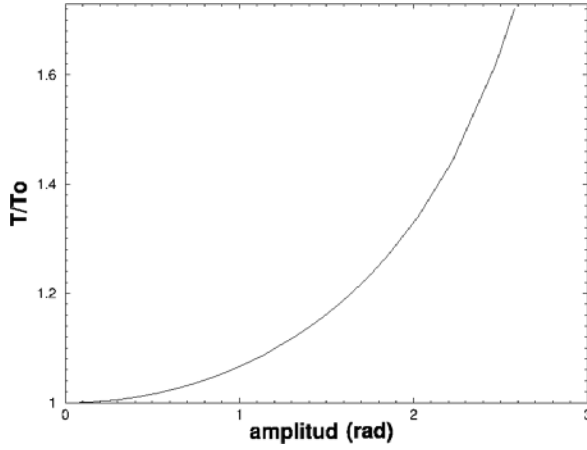


Figura 2. Periodo T del péndulo simple como función de la amplitud θ_0 , obtenido de nuestras soluciones numéricas. Aquí, $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ es el límite inferior válido sólo para pequeñas amplitudes. El periodo se incrementa al incrementar las amplitudes. Finalmente, éste diverge logarítmicamente [6] cuando la amplitud se aproxima al límite opuesto $\theta_0 = \pi$.

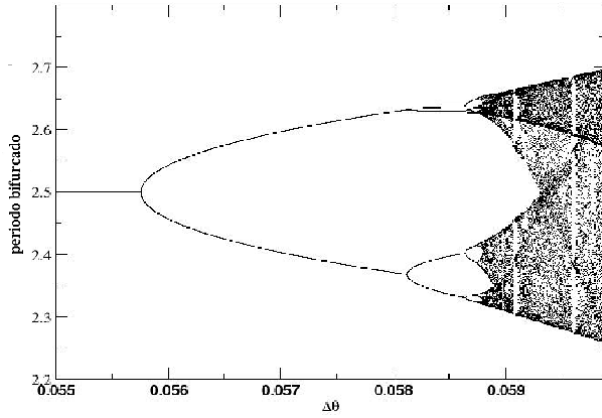


Figura 4. Diagrama de bifurcación para la cascada de duplicación de periodo, obtenida a partir de nuestros resultados numéricos. En este caso, el parámetro de control $\Delta\theta$ es menor que $\Delta\theta^{(crisis)}$.

las ecuaciones (5) y (6) para un determinado conjunto de parámetros $g, \ell, T, \Delta t$ y λ , cuyo valor se mantuvo constante. Estos valores son irrelevantes, pues: i) g y ℓ simplemente determinan el periodo mínimo T_0 , cualquier cambio en sus valores corresponde a un simple cambio de escala **global** del tiempo (hemos escogido $\ell = 1.0m$ y $g = 9.81m/s^2$, lo que corresponde a $T_0 \cong 2.006s$); ii) mantenemos el mismo razonamiento para T , el cual es medido en terminos de T_0 (hemos escogido $T = 2.5s \cong 1.25T_0$); iii) el único papel de Δt es la precisión numérica, sólo necesita ser lo suficientemente pequeño (hemos escogido $\Delta t = 0.01$ que corresponde a una precisión de una parte en 10^4 , por lo menos) y finalmente, iv) λ controla cuán rápido se disipa la energía provista por cada golpe, cualquier cambio en ese valor puede ser compensado por el correspondiente cambio en la intensidad de los golpes. Así, una vez que la razón

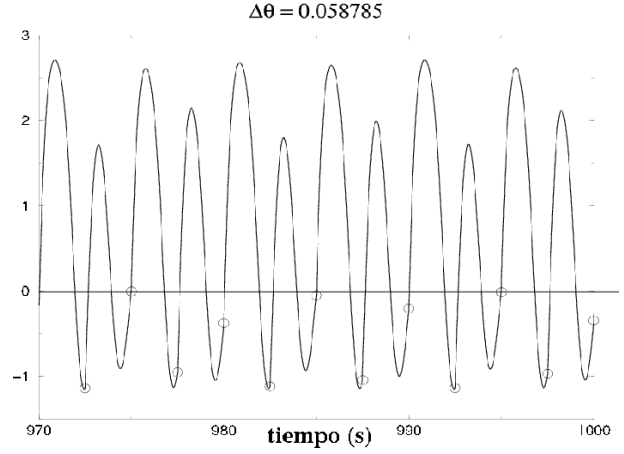


Figura 5. Posición $\Delta\theta(t)$ del péndulo impulsado como función del tiempo al comienzo del caos. Aquí, el parámetro de control es $\Delta\theta = 0.058785$.

T/T_0 es fijada, la intensidad del golpe $\Delta\theta$ es nuestro único parámetro de control, que se debe cambiar de una simulación a otra.

Un caso límite simplificado de nuestro sistema se puede obtener tomando $g = 0$, recuperando el llamado rotor impulsado. Aunque éste carece de cualquier tipo de modo normal de oscilación, debido a la ausencia de intercambio entre energía potencial y cinética, es un sistema dinámico rico que presenta un comportamiento caótico, aparte de otras características interesantes (ver, por ejemplo, [1]). Otro sistema similar es estudiado en [2], donde el péndulo se impulsa de manera continua por una fuerza sinusoidal. En lugar de eso, nuestro impulso mediante golpes proporciona un carácter discreto, que conduce naturalmente a un mapa de Poincaré, permitiendo el estudio de fenómenos de sincronización. Nuestro péndulo impulsado por golpes (con $g \neq 0$) incluye algunos otros ingredientes, particularmente, la ya citada posibilidad de un comportamiento resonante dentro de una banda continua de frecuencias de modos normales de oscilación. El propósito del presente trabajo es el de investigar las consecuencias de estos nuevos ingredientes.

La Figura (3) muestra el movimiento asintótico (después de que el régimen transitorio dependiente de la condición inicial ha terminado) para diferentes valores de la intensidad de los golpes $\Delta\theta$. Para un amplio rango de valores de $\Delta\theta$, menores que $\Delta\theta \cong 0.05$, tenemos siempre el mismo tipo de movimiento mostrado en la Figura (3a). Los golpes periódicos están sincronizados y ocurren siempre en la misma fase cerca del que debería ser el punto de retorno (velocidad cero). Mas allá de $\Delta\theta \cong 0.05$, los golpes periódicos comienzan a sincronizarse a fases bajas antes del punto de retorno (Figura (3b)).

Incrementando aún $\Delta\theta$, encontramos una transición, o, lo que es en realidad, una “cascada” de dicha transición. Primero, justo después de $\Delta\theta^{(1)} = 0.05577525$, dos oscilaciones completas sucesivas ya no son idénticas (Figura (3c)): las repeticiones ocurren sólo después de

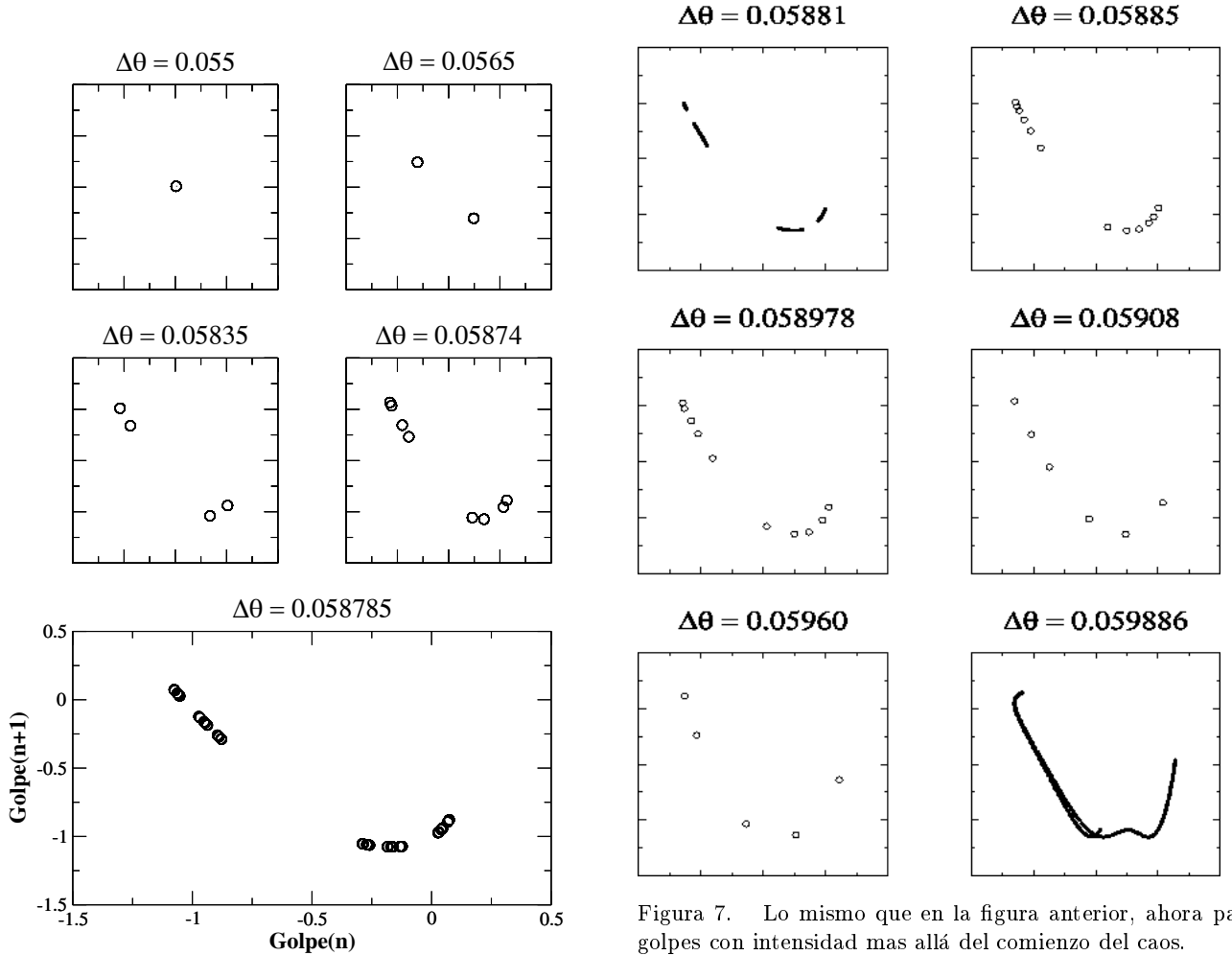


Figura 7. Lo mismo que en la figura anterior, ahora para golpes con intensidad mas allá del comienzo del caos.

Figura 6. Primer mapa de retorno para las fases donde golpes sucesivos sincronizan. Los ejes son los mismos para todos los gráficos, mostrado en la parte inferior que corresponde al comienzo del caos.

dos oscilaciones sucesivas y el periodo real es duplicado. Este periodo consiste de dos intervalos de tiempo sucesivos pero diferentes, uno más pequeño que el otro, a los que llamaremos “periodos **bifurcados**” por simplicidad.

Una segunda bifurcación sucede mas allá de $\Delta\theta^{(2)} = 0.05813020$ (Figura (3d)): ahora el periodo verdadero corresponde a cuatro intervalos sucesivos de tiempo diferentes. Podemos determinar también una tercera y cuarta bifurcaciones que suceden más allá de $\Delta\theta^{(3)} = 0.05864550$ y $\Delta\theta^{(4)} = 0.05875531$, respectivamente. La Figura (4) muestra (parte de) el diagrama de bifurcación obtenido de nuestros resultados numéricos. Estas bifurcaciones sucesivas del periodo parecen seguir la clase de universalidad descubierta por M. Feigenbaum [3]. Para una descripción simple e interesante de este descubrimiento y su correspondiente teoría de grupo de renormalización, ver, por ejemplo, la ref. [4]. De hecho, podemos estimar la constante de Feigenbaum:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta\theta^{(n)} - \Delta\theta^{(n-1)}}{\Delta\theta^{(n+1)} - \Delta\theta^{(n)}} = 4.669..., \quad (7)$$

usando nuestros valores medidos $\Delta\theta^{(1)}, \Delta\theta^{(2)}, \Delta\theta^{(3)}$ y $\Delta\theta^{(4)}$ donde ocurren las cuatro primeras bifurcaciones. Como una primera estimación, obtenemos $\delta \cong 4.5373$ de los primeros tres valores. La segunda estimación mejorada es $\delta \cong 4.669$, obtenida usando los tres últimos valores, y se encuentra en perfecta concordancia con el valor teórico [3] mostrado en la parte derecha de la ecuación (7) (cf. pag. 1 en [4]). Extrapolando a partir de estos resultados, esperamos un comportamiento caótico mas allá de $\Delta\theta^{(\infty)} = 0.058785$. La Figura (5) muestra el movimiento asintótico obtenido con esta intensidad particular de golpe; éste corresponde al principio del caos.

Los anteriores resultados se obtuvieron mediante la medida de los “periodos de bifurcación”, esto es, el tiempo que demora una oscilación completa. Una alternativa es construir un mapa de Poincaré, observando las fases donde golpes sucesivos pasan a ser sincronizados, es decir, la secuencia de ángulos $\theta_{nt} = \theta_{t=nT}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) [5]. Estos puntos están marcados con círculos en las figuras (3) y (5). De hecho, esta aproximación proporciona una mayor precisión numérica que en el análisis anterior, que fue elaborado sobre la base de los “periodos bifurcados”.

Para golpes de baja intensidad ($\Delta\theta < \Delta\theta^{(1)}$) esta secuencia converge a un simple punto fijo. El atractor se convierte en un ciclo de periodo 2 mas allá de $\Delta\theta^{(1)}$, un

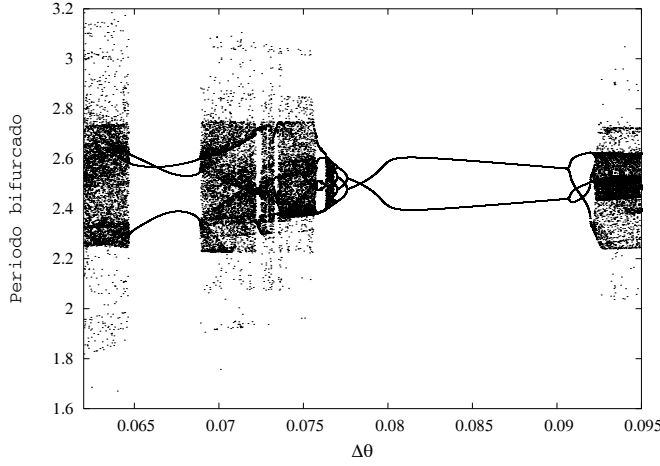


Figura 8. Diagrama de bifurcación (una parte) mostrando claramente la presencia de dos grandes ventanas; en una de ellas (en el extremo izquierdo) tenemos el ciclo 3.

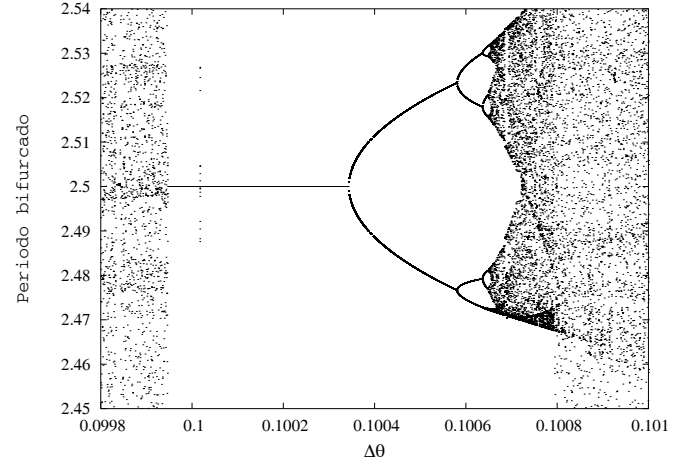


Figura 10. Una repetición del escenario caótico y secuencia de bifurcaciones visto anteriormente en la Figura (4).

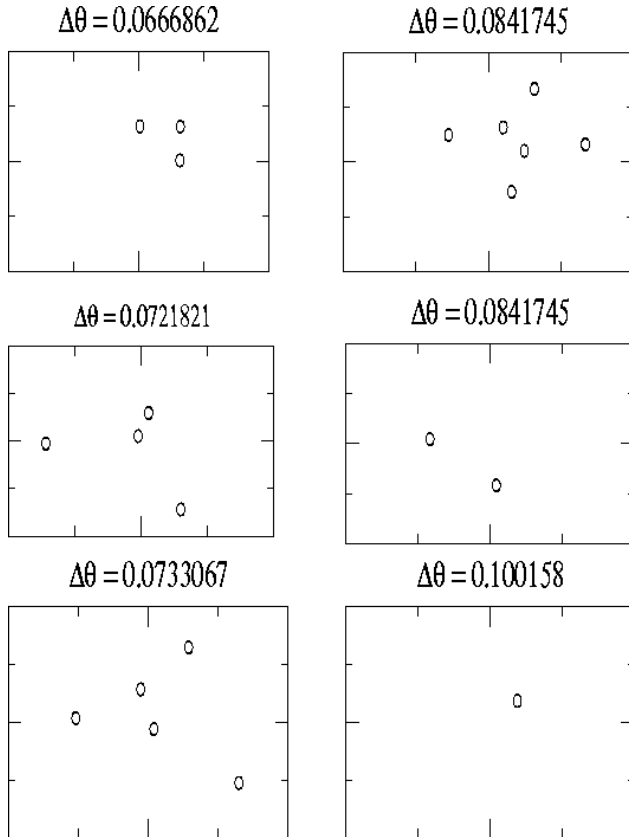


Figura 9. Primer mapa de retorno exhibiendo comportamiento periódico en medio del caos, para algunos valores de $\Delta\theta$.

ciclo de periodo 4 mas allá de $\Delta\theta^{(2)}$ y así sucesivamente. Para $\Delta\theta = \Delta\theta^{(\infty)}$ la secuencia ya no es periódica. La cascada de bifurcación puede ser visualizada mejor, observando los mapas de retorno $\theta_{(n+1)T} \times \theta_{nT}$ (Figura (6)). Al comienzo del caos (grafico inferior) los puntos sucesivos forman una curva fractal donde se pierde la

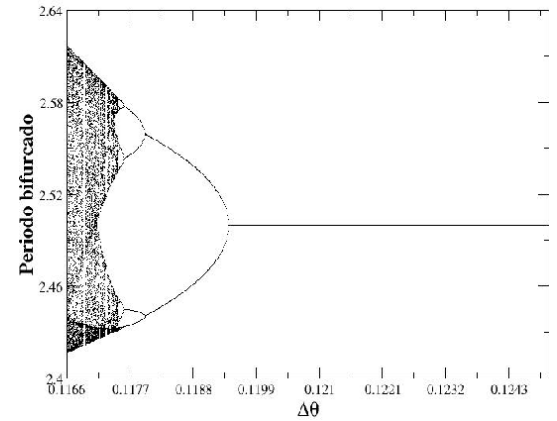


Figura 11. Diagrama de bifurcación para la cascada de duplicación de periodo obtenida de nuestros resultados numéricos. En este caso, el parámetro de control $\Delta\theta$ es mayor que $\Delta\theta^{(crisis)}$.

sincronización por primera vez.

Finalmente, mas allá de $\Delta\theta^{(\infty)}$ puede observarse un comportamiento caótico sin nada de sincronización. El primer mapa de retorno está formado ahora por (piezas de) una curva continua (Figura (7), parte superior izquierda). Incrementando más la intensidad de los golpes, la sincronización es reestablecida dentro de algunas ventanas estrechas, correspondientes a periodos que ya no están determinados por potencias de 2 como antes. Dentro de estas ventanas, los periodos son múltiplos de T impuestos por los golpes; los factores correspondientes son números impares y sus múltiplos (3, 5, 6, ...). Este comportamiento también se observa en muchos otros sistemas dinámicos, por ejemplo, el mapa logístico estudiado originalmente por Feigenbaum. La Figura (7) muestra algunos ejemplos con periodos $5T, 10T, 6T$ y $12T$. Dentro de las ventanas periódicas se puede observar de nuevo un comportamiento caótico (no

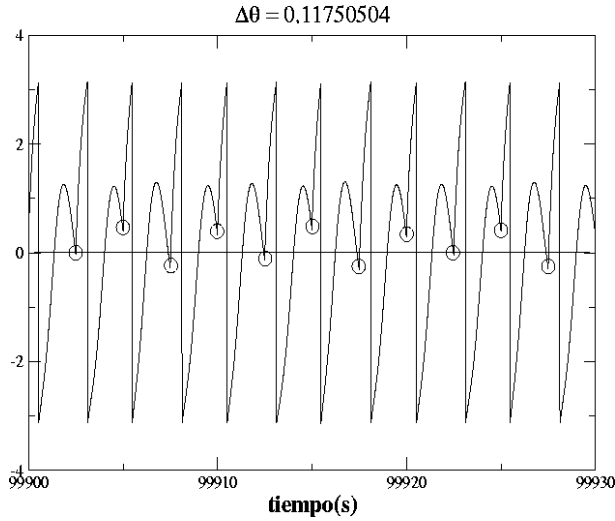


Figura 12. Posición $\Delta\theta(t)$ del péndulo impulsado como función del tiempo al comienzo del caos. El parámetro de control es $\Delta\theta = 0.11750504$.

mostrado). Estas ventanas periódicas también muestran cascadas de bifurcación, por ejemplo, en $3T, 6T, 12T, \dots$ y —como otro ejemplo— en $5T, 10T, 20T, \dots$. Dichas cas-

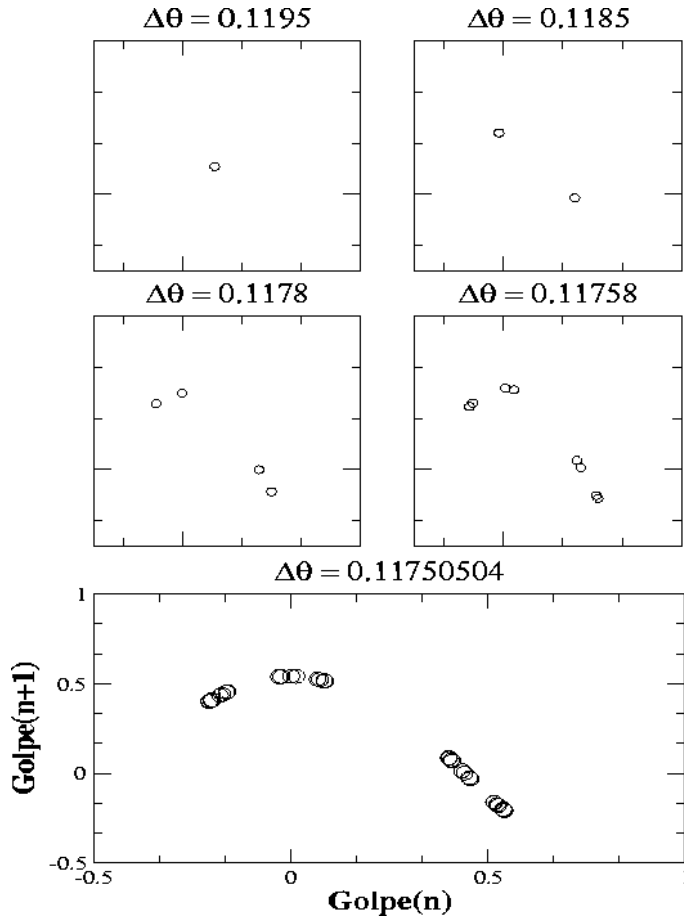


Figura 13. Primeros mapas de retorno para las fases donde golpes sucesivos están sincronizados. Los ejes son los mismos para todos los gráficos, mostrado en la parte inferior que corresponde al comienzo del caos.

cadass aparecen en el sentido inverso (primero periodos grandes), para acumularse asimismo en el principio del caos. Este comportamiento (caos con ventanas de periodos impares) termina en $\Delta\theta^{(crisis)} = 0.05989$, a partir del cual el movimiento ya no es oscilatorio: el péndulo realiza giros enteros, sobrepasando su posición vertical superior. La Figura (7) (inferior derecha) muestra el comportamiento caótico justo antes de este límite. La ventana de periodo 3 no aparece para el periodo externo particular $1.25T_0$ que adoptamos en este trabajo, pues considerando golpes de intensidad para los cuales los periodos $6T$ y $12T$ fueron encontrados (Figura (7)), estimamos que dicha ventana caería más allá de $\Delta\theta^{(crisis)}$.

Para $\Delta\theta > \Delta\theta^{(crisis)}$, el péndulo también presenta un comportamiento interesante. En particular, verificamos en medio del caos ventanas anchas donde el comportamiento del péndulo es periódico. De hecho, observamos la presencia de dos grandes ventanas, una representando un ciclo 3, que como ya imaginábamos, caería para valores de $\Delta\theta$ mas allá de $\Delta\theta^{(crisis)}$, y otra ventana ancha representando un ciclo 2. La Figura (8) nos muestra claramente este comportamiento, ligeramente diferente del conocido mapa logístico, donde no observamos esas grandes ventanas. Evidentemente, existen (Figura (9)) pequeñas ventanas donde tenemos nuevamente comportamiento periódico.

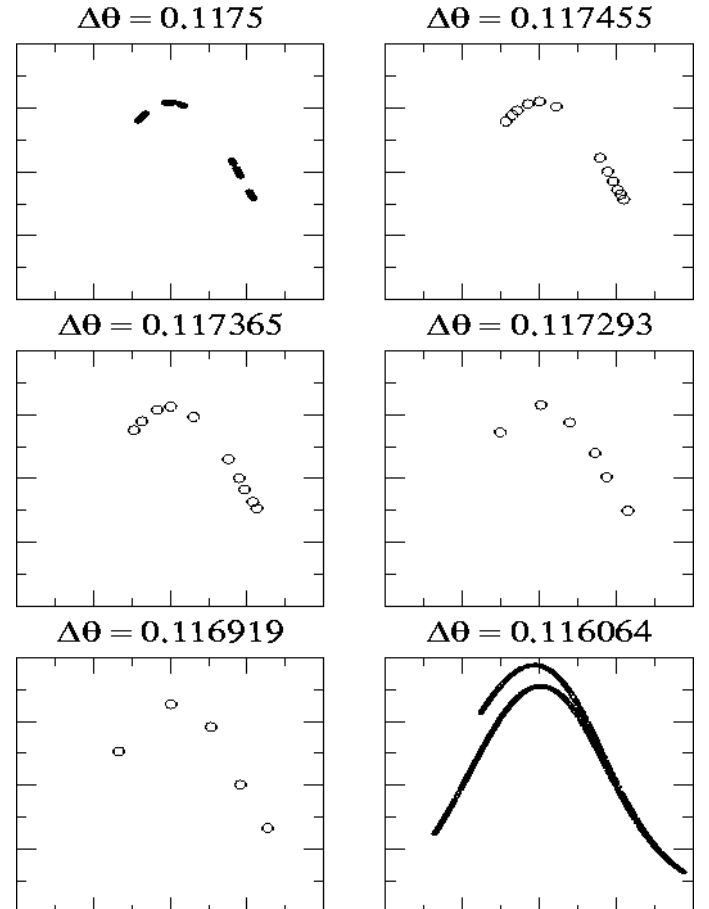


Figura 14. Lo mismo que en la figura anterior, ahora para golpes con intensidad más allá del comienzo del caos.

En una de esas ventanas encontramos un resultado muy interesante. Como puede verse en la Figura (10), existe una repetición del escenario de bifurcaciones y caos visto anteriormente en la Figura (4). De hecho, como sabemos, una peculiaridad en estos mapas es la auto-similitud.

Aumentando el parámetro $\Delta\theta$, observamos una secuencia de bifurcaciones bastante similar a lo que se vio anteriormente. Entretanto, esta secuencia ocurre —de forma un poco diferente— a medida que disminuimos el valor de $\Delta\theta$ a partir de $\Delta\theta^{(1)} = 0.119427$, donde tenemos la primera bifurcación. Para $\Delta\theta > \Delta\theta^{(1)}$, el péndulo vuelve a tener un periodo $T = 2.5s$. Para valores menores que $\Delta\theta^{(1)}$, el periodo se duplica, esto es, dos oscilaciones ya no son idénticas. Disminuyendo más el valor de $\Delta\theta$, encontramos una segunda bifurcación en $\Delta\theta^{(2)} = 0.117962$, donde el periodo es duplicado nuevamente, correspondiendo a cuatro intervalos sucesivos de tiempo. Una tercera y cuarta bifurcación ocurren en $\Delta\theta^{(3)} = 0.1176029$ y $\Delta\theta^{(4)} = 0.117526$, respectivamente. Esta secuencia de bifurcaciones puede ser observada en el diagrama de bifurcación (en la Figura (11) se muestra una parte de él) que se obtuvo con nuestras simulaciones numéricas.

Notamos nuevamente que esa secuencia de bifurcaciones sigue la clase de universalidad de Feigenbaum [4]; luego estimamos el valor de la constante δ a partir de los valores $\Delta\theta^{(1)}$, $\Delta\theta^{(2)}$, $\Delta\theta^{(3)}$ y $\Delta\theta^{(4)}$. A partir de los tres primeros valores obtuvimos $\delta \cong 4.07964$ y a partir de los últimos tres valores obtuvimos $\delta \cong 4.6698$. Este último resultado nuevamente concuerda bien con el resultado teórico previsto por Feigenbaum [4]. Extrapolando esos resultados, esperamos un comportamiento caótico a partir de $\Delta\theta^{(\infty)} = 0.11750504$. La Figura (12) muestra el comportamiento del péndulo para este valor particular.

A continuación construimos de nuevo los mapas de retorno para algunos valores de $\Delta\theta$. Para golpes con intensidades mayores que $\Delta\theta^{(1)}$, la secuencia converge a un punto fijo simple. Disminuyendo $\Delta\theta$ a valores menores que $\Delta\theta^{(1)}$, el atractor pasa a tener un periodo de ciclo 2, un periodo de ciclo 4 antes de $\Delta\theta^{(2)}$ y así sucesivamente. La secuencia ya no es periódica cuando fijamos $\Delta\theta^{(\infty)}$. Esta secuencia de bifurcaciones puede ser observada en la Figura (13). Antes de $\Delta\theta^{(\infty)}$, se tiene nuevamente un comportamiento caótico, donde no se observa sincronización fuera de las ventanas impares. El primer mapa de retorno, como antes, está formado por piezas de una curva continua (Figura (14), parte superior izquierda). Disminuyendo las intensidades de los golpes, la sincronización es reestablecida dentro de algunas ventanas, pero los periodos ya no están determinados por potencias de 2. La Figura (14) muestra ejemplos de periodos $5T, 10T, 6T$ y $12T$.

4. CONCLUSIONES

Para concluir, hemos resuelto numéricamente la ecuación de movimiento para un péndulo rígido bajo el impulso de golpes. Para golpes de baja intensidad, el

péndulo entra en resonancia, siguiendo un movimiento periódico. El periodo coincide con el periodo externo T impuesto por los golpes. Los golpes sucesivos están sincronizados, ocurriendo siempre en la misma posición del péndulo (fase) cerca del punto de retorno (fase estacionaria). Incrementando la intensidad de los golpes, se observa una duplicación de periodo; las repeticiones ocurren sólo después de dos oscilaciones completas sucesivas. El movimiento aún está sincronizado con los golpes externos, pero no después de una oscilación completa, ya que las fases precisas donde los golpes sucesivos ocurren se alternan entre 2 valores diferentes que ya no están cerca del punto de retorno. En realidad, incrementando la intensidad de los golpes, el sistema presenta una cascada de bifurcaciones con periodos $2T, 4T, 8T, \dots$ siguiendo la ruta al caos de Feigenbaum. Esta secuencia de bifurcaciones se acumula en el principio del caos, correspondiendo a la intensidad exacta del golpe, donde se pierde la sincronización. Mas allá de esto, se observa un comportamiento caótico. Incrementando aún la intensidad de los golpes (dentro de la región caótica), aparecen ventanas periódicas donde se restaura la sincronización. Los periodos son ahora múltiplos de números impares $3T, 6T, 12T, \dots, 5T, 10T, 20T, \dots$, etc. En el sentido inverso, es decir, disminuyendo la intensidad de los golpes, las secuencias también siguen cascadas de bifurcación hacia el comienzo del caos donde también se acumulan. Para $\Delta\theta > \Delta\theta^{(crisis)}$, el péndulo realiza vueltas completas, superando su posición vertical superior. A partir del punto $\Delta\theta^{(crisis)}$, el péndulo presenta un comportamiento bastante peculiar: observamos, en particular, dos grandes ventanas donde el movimiento es periódico, una de ciclo 3 y otra de ciclo 2. Además, varias otras ventanas son observadas en medio del caos. A partir de un cierto valor del parámetro $\Delta\theta$, el péndulo presenta un comportamiento similar al que tuvo para $\Delta\theta < \Delta\theta^{(crisis)}$, o sea, verificamos una secuencia de bifurcaciones con periodos $\dots 8T, 4T, 2T$, hasta que el péndulo vuelve a tener un comportamiento periódico con $T = 2.5s$.

REFERENCIAS

- [1] J. V. José e E. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge University Press, pag. 453 (1998).
- [2] L. N. Hand and J. D. Finch, *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press, pag 453 (1998).
- [3] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); **21**, 669 (1979).
- [4] M. J. Feigenbaum, *Los Alamos Science* **1**, 4 (1980).
- [5] Existe un mapa discreto proporcionando la fase y su derivada, justo después de algunos golpes, como función de las mismas cantidades, justo después del golpe previo. G. M. Zaslavskii, *Phys. Lett.* **A69**, 145 (1978). Esta aproximación evita la solución completa de la ley de Newton entre golpes sucesivos, permitiendonos explorar mucho mejor el espacio de fases. U. Feudel, C. Grebogi, B. R. Hunt and J. A. Yorke, *Phys. Rev.* **E54**, 71 (1996); R. Chacon and A. Martinez Garcia-Hoz, *Phys. Lett.* **A281**, 231 (2001). Por razones didácticas, preferimos la aproximación tradi-

cional, obteniendo el movimiento continuo completo, algunos ejemplos son mostrados en la Figura (3). De esta manera, la cascada de duplicación de periodos puede ser directamente observada, dando al estudiante un mejor entendimiento conceptual del fenómeno.

- [6] Aparte del límite simple $\theta_0 \rightarrow 0$, una solución analítica cerrada también es posible en el límite $\theta_0 \rightarrow \pi$. Ver, por ejemplo, P. M. C. de Oliveira, *Comportamento Crítico no Pêndulo Simples*, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **17**, 21 (1995).

SEIS AÑOS DE MEDIDAS DE OZONO Y RADIACIÓN ULTRAVIOLETA EN LA PAZ, BOLIVIA

Francesco Zaratti¹, Ricardo Forno¹, Lucy Cuarita² y Pablo Saavedra¹

¹Laboratorio de Física de la Atmósfera
Instituto de Investigaciones Físicas

Universidad Mayor de San Andrés

²Carrera de Estadística

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Universidad Mayor de San Andrés

RESUMEN

En este artículo se analizan los datos de la columna de ozono, tomados por el Brewer 110 en operación en el Laboratorio de Física de la Atmósfera en La Paz, Bolivia, durante seis años y se los compara con las medidas equivalentes del instrumento TOMS, a bordo del satélite Earth Probe, en el mismo periodo. Asimismo se hace una caracterización de la radiación ultravioleta en la ciudad de La Paz, determinando valores típicos mensuales del índice de la radiación ultravioleta.

1. INTRODUCCION

El espectrofotómetro Brewer MKIV [1], No. 110, funciona en La Paz, gracias a un Convenio con el INPE-Brasil, desde julio de 1996 ininterrumpidamente. Seis años son un período suficiente, si no para analizar tendencias, por lo menos para caracterizar la columna de ozono y la intensidad de la radiación ultravioleta en la ciudad de La Paz. La importancia de esos análisis radica en la peculiar posición geográfica de La Paz, en el trópico y a gran altitud ($16.5^{\circ}S$, $68.1^{\circ}W$, $3600m.s.n.m.$), y en la incidencia que tiene la radiación ultravioleta en la salud y en la economía de los habitantes de Bolivia. Adicionalmente, se dispone de los datos tomados por el espectrofotómetro TOMS, a bordo del satélite Earth Probe [2], que, en el caso analizado del ozono, merecen ser comparados con los datos de superficie, con el fin de controlar la calibración de ese instrumento desde una localidad peculiar por sus condiciones ambientales.

Los objetivos propuestos han implicado una serie de tareas que se enumeran a continuación:

1. Recolección, ordenamiento, depuración y validación de los datos de ozono de ambos instrumentos;
2. Recálculo de los datos de UVB del Brewer, con base a las dos calibraciones de fábrica de los años 1997 y 2001;
3. Análisis estadístico de los datos de ozono y comparación entre datos de superficie y del satélite;
4. Análisis estadístico de los datos de UVB eritémica del Brewer;

A continuación analizaremos los resultados obtenidos en cada actividad.

2. VALIDACION Y ANÁLISIS DE DATOS DE OZONO

Inicialmente, los 2192 datos posibles se redujeron, previa depuración de días incompletos o en los cuales los instrumentos no operaron, a 2112 datos útiles para el Brewer y 1762 para el EPTOMS.

Después de la depuración de los promedios diarios de ozono a lo largo de seis años (julio 1996 a junio 2002), se ha detectado un problema con los datos del año 2000 y 2001. En el período enero 2000 a agosto 2001, los valores de O_3 del Brewer se apartan sensiblemente de sus equivalentes del EPTOMS. De hecho, durante la recalibración del Brewer, en agosto de 2001, se constató que el reloj del instrumento estaba desfasado más de 3 minutos con respecto a la hora solar, lo que inducía un error en las medidas. El error no era sistemático ni aleatorio, y dependía del ángulo cenital (SZA) en el momento de la medida: para grandes SZA la diferencia era más marcada debido a la mayor rapidez del movimiento del Sol. La alternativa era: echar a perder los datos de casi dos años o bien recuperar esos datos con criterios de validación. Escogimos el segundo camino, imponiendo a los datos diarios de O_3 tomados por el Brewer los siguientes criterios:

- I. Error en la serie de la medición $\leq 2.5DU$, que equivale a un 1% del promedio de O_3 .
- II. Número mínimo de medidas diarias = 3.
- III. *Air mass*, $m \leq 2$, lo que equivale a $SZA < 60^{\circ}$, debido a la definición de $m = 1/\cos(SZA)$.
- IV. Intervalo de medición: toda la serie. O sea que el criterio de validación se aplicó por igual a todos los datos, lo que representa un test adicional de la bondad de los criterios.

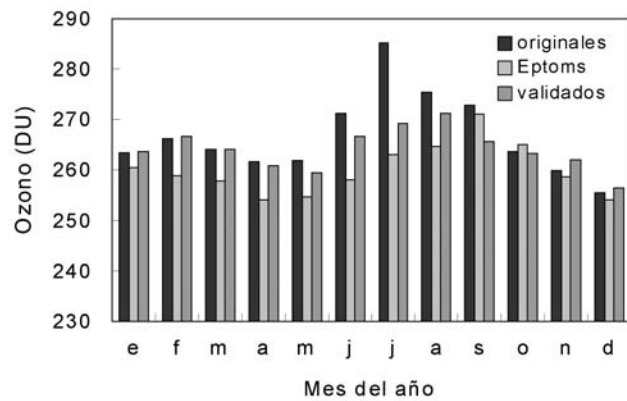


Figura 1. Columna de ozono en La Paz para el año 2000.

- V. Rango aceptable de los valores de ozono (220, 290), con base a los valores medios mensuales de esa magnitud en los años anteriores.

En el caso que las medidas de un día cumplieran todos esos criterios, se calculaba y aceptaba el promedio del día, caso contrario se realizaba una media móvil de los 5 datos válidos anteriores.

Asimismo se establecieron criterios de depuración de los datos del EPTOMS debido a la necesidad de mantener la medida dentro de una rejilla centrada en torno a La Paz, considerando la proximidad de la cordillera y de los valles andinos. En vista de que el TOMS mide el ozono sobre una región de 1° de latitud por 1.25° de longitud, se impuso la restricción que el centro de esa celda estuviera entre 15.5° y 17° de latitud y entre 67.5° y 68.6° de longitud.

Finalmente, vista la variabilidad diaria de los valores del TOMS y del Brewer, se eligió trabajar con los promedios mensuales, obteniéndose, como resultado, primeramente una mejora de los valores del año 2000 (Figura 1), luego la validación de la serie total de los seis años (Figura 2). Las mejoras son evidentes a lo largo de toda la serie.

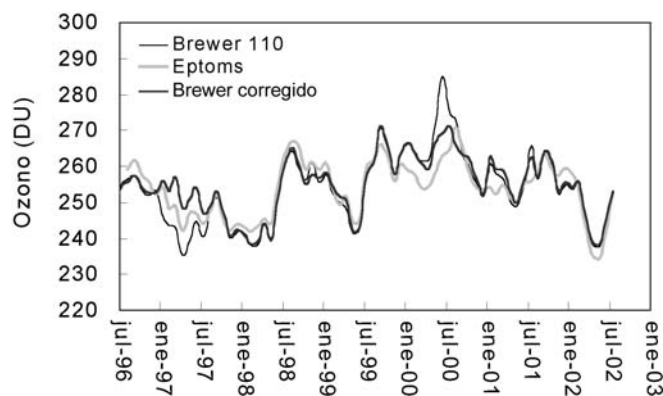


Figura 2. Serie temporal de ozono en La Paz, 1996-2002.

De ese modo, la comparación entre Brewer y TOMS, conduce a un acuerdo bastante bueno entre los dos

TABLA 1

Valores característicos del ozono en La Paz (en DU).

	Brewer	TOMS
promedio	254.9	254.0
STD	8.3	7.8
máximo	271.4	271.0
mínimo	238.4	235.7
máx. diferencia	8.5	

instrumentos, ya que los respectivos valores caen dentro del error estadístico de cada dato mensual.

Además, se comprobó indirectamente la bondad del criterio de restringir el SZA, en cuanto en los meses de menor SZA (verano) las correcciones al dato original resultan menores que en los meses invernales.

Un resumen de los resultados que caracterizan el ozono en La Paz, está consignado en la Tabla 1.

Finalmente en la Figura 3 se reporta las medias mensuales de ozono sobre los 6 años, con la respectiva dispersión. Es interesante observar que el mes de mayor dispersión es junio, debido al incremento de ozono del año 2000, en el Brewer y en el TOMS. La razón de ese incremento puede estar en la combinación de dos factores: la mayor actividad solar de ese año y el aporte de la Quasi-Biennial Oscillation (QBO), con período entre 2 y 3 años, reconocible en la Figura 2.

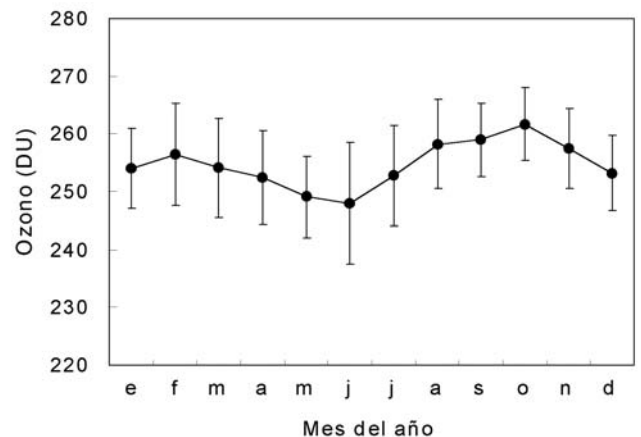


Figura 3. Promedio mensual de ozono en La Paz (6 años).

3. VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DATOS DE UVB ERITÉMICA

Los datos de seis años de la UVB eritémica tomados por el espectrofotómetro Brewer MKIV han sido re-procesados con base a las dos calibraciones de fábrica, realizadas respectivamente los años 1997 y 2001. Se ha aplicado una regresión lineal a los factores espectrales de calibración, en el supuesto razonable que el desgaste de las lámparas de calibración sea proporcional al tiem-

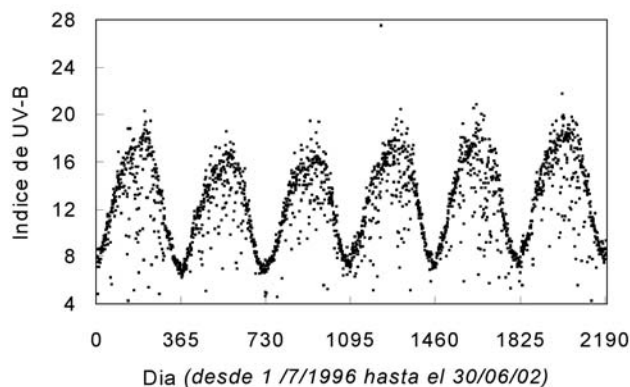


Figura 4. Serie temporal de máximos diarios de UVB eritémica en La Paz (1996-2002).

po de uso. De ese modo se ha generado un archivo de calibración por cada año, mediante el cual se han re-procesado los datos correspondientes de ese año.

De ese modo se obtiene la serie temporal de los máximos diarios de UVB que se muestra en la Figura 4. En esa gráfica son fácilmente distinguibles las altas fluctuaciones de la intensidad de la RUV eritémica en verano y su regularidad en invierno, ambos comportamientos debidos a la particular climatología local. Además se aprecian variaciones anuales, dependientes de factores climáticos y astronómicos (actividad solar, principalmente).

Se destacan algunos días con excepcional intensidad de RUV, días no precisamente soleados, sino que resienten de los efectos de la intensificación de la UVB que producen las nubes por dispersión y reflexión.

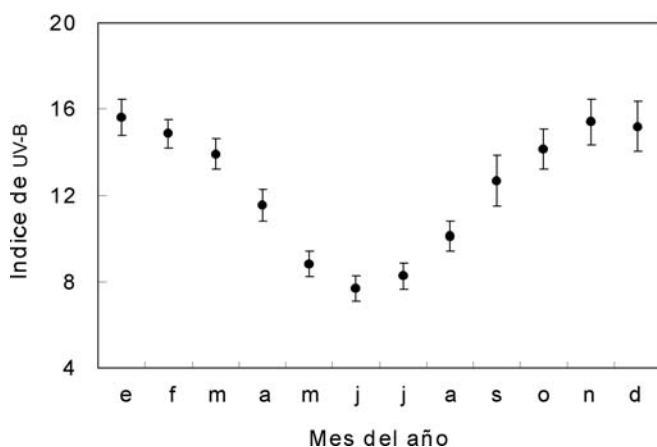


Figura 5. Promedios mensuales del IUV en La Paz (6 años).

Con la serie depurada de los máximos diarios es posible construir la serie de los promedios mensuales, la misma que resiente de la variabilidad climática de año a año. En efecto, el mes de máxima irradiancia oscila entre octubre y enero. Al contrario la irradiancia invernal parece bastante más regular, con mínimos en junio. En todo caso se confirma que los mínimos invernales del Índice de UVB (IUV) corresponden a valores elevados de ese indi-

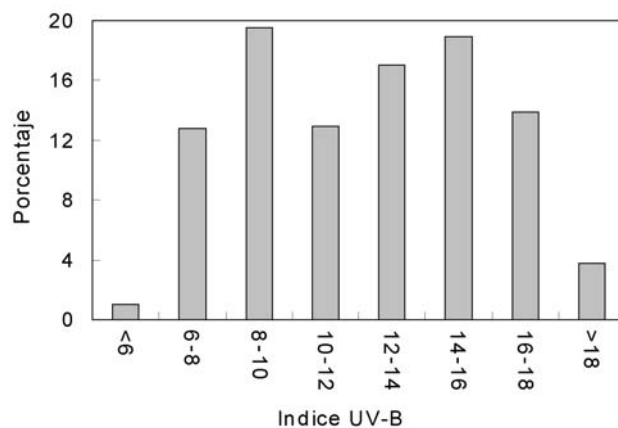


Figura 6. Distribución días del año según IUV (6 años).

cador en países de latitudes medias. En la Figura 5 se presenta el promedio mensual del IUV con su desviación estándar. Se aprecia que los meses de máxima variabilidad del índice son de septiembre a diciembre.

Finalmente se ha construido un cuadro con los porcentajes de días del año que muestran un cierto valor del IUV (Figura 6). Si se considera que 10 es un valor muy elevado, según la escala internacional que va del 1 al 16, vemos que 2/3 de los días del año tienen valores superiores a ese límite. Asimismo casi el 18% de los días del año muestran un IUV superior al máximo de la escala internacional.

Otros análisis de los datos han permitido confirmar conceptos ya conocidos como que la dosis de UVB eritémica que se recibe en las tres horas centrales en torno al medio día representa el 50% de la dosis total del día, hecho que da fundamento a las recomendaciones de evitar de exponerse al sol en ese horario. Asimismo, se ha comprobado que la dosis recibida entre las 10 y las 15 horas (intervalo de tiempo considerado en épocas de alerta) alcanza al 80% de la dosis diaria [3].

Para terminar este análisis de la serie temporal de los máximos diarios, resumimos las características de la RUV eritémica medida en La Paz (Tabla 2).

TABLA 2

Valores característicos de la RUV en La Paz.

Promedio IUV	12.3
STD IUV	3.5
Promedio mW/m^2	308.2
STD mW/m^2	88.6

4. AGRADECIMIENTOS

El Brewer 110, fuente de los datos analizados en este artículo, es de propiedad del INPE-BRASIL, institución a la cual va nuestro agradecimiento en la persona del Dr. V. Kirchhoff, Director del Laboratorio de Ozono.

REFERENCIAS

- [1] Brewer, A.W., *A replacement for the Dobson spectrophotometer?*, Pure Appl. Geophys., 106—108: 919—927, 1973.
- [2] <http://jwocky.gsfc.nasa.gov>.
- [3] Zaratti F. y Forno R., “*La Radiación Ultravioleta en Bolivia*”, Edic. OPS/OMS, La Paz, 2003.

IMÁGENES ÓPTICAS DE LAS DISMINUCIONES DE PLASMA EN LA CRESTA DE LA ANOMALÍA ECUATORIAL

H.S.S. Sinha¹, P. K. Rajesh¹, R. N. Misra¹, R. Pandey², N. Dutt¹, M. B. Dadhania¹ y S. B. Banerjee¹

¹*Physical Research Laboratory
Navrangpura, Ahmedabad 380 009, India*

²*M L S University, Udaipur, India*

RESUMEN

Se realizó un experimento con imágenes ópticas de todo el cielo, tomadas desde el Monte Abu ($24.55^{\circ}N$, $72.71^{\circ}E$, $18.48^{\circ}N$ Geomag.) para estudiar las disminuciones de gran escala del plasma ionosférico que ocurren en la cresta de la región de anomalía del hemisferio norte. Durante la campaña experimental, se encontraron disminuciones de plasma en imágenes de luminiscencia nocturna a $630nm$. En una de las noches de estudio se observó que las disminuciones de plasma sufrían primero una división en dos partes que se movían con velocidades diferentes. Luego de 15 minutos, una de las partes se unió a otra zona de disminución de plasma. Esta es una observación nueva y es un indicador de un gran cambio vertical en la velocidad zonal. Se observó que el extremo norte de las disminuciones de plasma se bifurcaba. Estas observaciones nos han permitido obtener imágenes del extremo norte de la disminuciones de plasma. Ese extremo corresponde a una latitud geomagnética cercana a $23.1^{\circ}N$, la cual, al ser mapeada en términos de la altura máxima alcanzada por las disminuciones en el ecuador geomagnético, corresponde a $950km$. La burbuja vertical incrementa su velocidad de levantamiento durante las noches de observación, estuvo entre 53 y $57ms^{-1}$.

ABSTRACT

An all sky optical imaging experiment was conducted from Mt. Abu ($24.55^{\circ}N$, $72.71^{\circ}E$, $18.48^{\circ}N$ Geomag.) to study the large-scale ionospheric plasma depletions from the crest of the anomaly region in the Northern Hemisphere. During this campaign, plasma depletions were observed in $630nm$ nightglow images. On one of the nights it was observed that plasma depletions first split in to two parts, which moved with different velocities. After about 15 min, one of the depleted parts joined with another depletion. This is a new observation and indicates strong vertical shear in the zonal velocity. The Northern end of some of the plasma depletions was observed to be bifurcated in two parts. These observations enabled us to image the northern fringe of the plasma depletions. The northern end of the observed plasma depletions corresponds to geomagnetic latitude of about $23.1^{\circ}N$, which when mapped back in terms of the maximum altitude attained by depletions at the geomagnetic equator, corresponds to about $950km$. The vertical bubble rise velocity for both nights, when plasma depletions were observed, was in the range of 53 to $57ms^{-1}$.

1. INTRODUCCIÓN

Aún es fascinante el estudio de las irregularidades atmosféricas asociadas con la expansión de la capa F ecuatorial (*equatorial spread F*: ESF) a pesar que ya se ha realizado una gran cantidad de trabajos utilizando una enorme variedad de métodos y que también se tiene una buena comprensión del comportamiento de la ionósfera ecuatorial nocturna, que es cuando esas irregularidades suelen generarse. Los resultados nuevos que se reportaron durante los últimos años han establecido que la técnica es una herramienta muy importante para el diagnóstico de tales irregularidades ionosféricas. Entre las observaciones más importantes

que utilizan los métodos de imágenes ópticas de todo el cielo están las referidas a las ondas de brillo (BW) o los patrones de brillo (BP) en esas imágenes. (Colerico et al., 1996, Mendillo et al., 1997a & 1997b, Sinha y Raizada, 2000). Las BP sólo fueron observadas en las imágenes tomadas con $630nm$ y con $557.7nm$, pero están ausentes de las imágenes tomadas a $777.4nm$ que fueron tomas casi simultáneamente. Se supone que estos incrementos del brillo nocturno, o los patrones de brillo son una señal característica del máximo de temperatura de medianoche (MTM). (Colerico et al., 1996, Mendillo et al., 1997a & 1997b, Sinha y Raizada, 2000). La práctica ausencia de los patrones de brillo en las

imágenes a $777.4nm$ es uno de las evidencias a favor de tal hipótesis. Sin embargo, Sinha et al. (2001) han reportado la aparición de esos patrones de brillo también en las imágenes a $777.4nm$. Entonces, se requieren de más observaciones y análisis para comprender el mecanismo generador de estas BP. Otro resultado muy interesante que se ha notado recientemente, es la aparición de estructuras de burbujas de plasma alineadas con un campo. Estas estructuras están en las imágenes a $777.4nm$ pero no en las imágenes simultáneas tomadas a $630nm$ (Abalde et al., 2001). Estos dos resultados recientes demuestran que el actual conocimiento de la generación de la disminución de plasmas no está completo, por lo que aquí se hace énfasis en la importancia de los estudios detallados de las irregularidades de plasma en la línea de emisión de $777.4nm$.

Si bien la naturaleza y evolución de las disminuciones de plasma han sido previamente estudiadas para estaciones no ecuatoriales (Mendillo y Baumgardner, 1982; Sahai et al., 1994; Sales et al., 1996; Weber et al., 1996; Fagundes et al., 1997), sólo se conocen datos para el hemisferio sur; y pese a que existen algunos estudios previos sobre el hemisferio norte (Sinha et al., 1996; 2000; 2001), todos ellos fueron realizados muy cerca del ecuador magnético. El presente trabajo se centra en el estudio de imágenes tomadas desde el Monte Abu ($24.55^\circ N$, $72.71^\circ E$, $18.48^\circ N$ Geomag.), muy cerca de la cresta de anomalía ecuatorial del hemisferio norte; e intentó fotografiar el margen norte de las disminuciones de plasma. Estas fueron observadas durante dos noches, y aquí se reportan los datos interesantes que se encontraron en esos casos.

2. DETALLES DEL EXPERIMENTO

En la figura 1 se muestra el diagrama de bloques del sistema de imágenes desarrollado por el Physical Research Laboratory (PRL, Ahmedabad, India) y utilizado en el Mt. Abu. El sistema está descrito en detalle en publicaciones previas (Sinha et al., 1996, 2001). Durante la presente campaña, se tomaron imágenes del brillo nocturno a $630nm$ utilizando un filtro de interferencia cuyo ancho de banda es de $1nm$, y una cámara de $35mm$. Las imágenes tomadas con la cámara se revelaron y fueron digitalizadas con una unidad de $12 - bits$. Luego se las procesó para eliminar los ruidos de fondo: el natural y el propio del sistema.

3. OBSERVACIONES REALIZADAS

Las imágenes fueron tomadas desde el Mt. Abu durante el alba u ocaso, dependiendo de las condiciones meteorológicas y la posición de la Luna. Cada observación consistió en la exposición por 30s con 15 minutos entre dos tomas consecutivas. Pese a que el sistema de imágenes de todo el cielo tiene un campo de visión de 180° , sólo se reportan aquí los datos correspondientes a un campo de visión (FOV) de $\pm 75^\circ$ de ángulo cenital. Esto evita los errores debidos a la distorsión del borde del campo de visión. La campaña duró siete noches

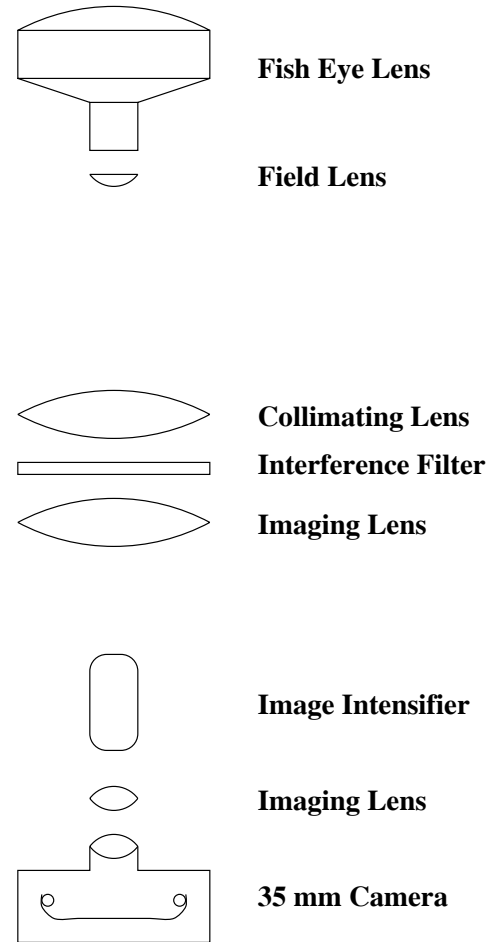


Figura 1. Diagrama de bloques del sistema de imágenes de todo el cielo desarrollado en el PRL-Ahmedabad.

consecutivas, de las cuales sólo dos presentaron una disminución de plasma, los días 14 y 15 de abril de 1999. El período de observación, del 12 al 18 de abril está clasificado como geomagnéticamente quieto. Debido a que no existía ninguna ionosonda operando cerca del ecuador geomagnético durante ese tiempo, se carece de la información acerca de las condiciones ionosféricas durante el período de inicio de la expansión ecuatorial F. Se contó con los ionogramas de la estación más cercana (Ahmedabad, $23^\circ N$, $72.4^\circ E$, $16.8^\circ N$ Geomag.), que muestran la presencia de una expansión F en las dos noches que se observaron las disminuciones de plasma.

La figura 2 muestra los ionogramas tomados desde Ahmedabad el 14 de abril de 1999, a horas 19:00, 20:00, 21:00, 22:00, 23:00 y 00:00 (LT). No se observa ninguna señal de la expansión F en los ionogramas de las 19:00 LT, pero sí se encuentra una señal fuerte a las 20:00 LT. Eso demuestra que las irregularidades llegaron a Ahmedabad después de las 19:00 LT. Igualmente, la señal de la expansión F aún es fuerte a las 23:00, pero desapareciendo después. El 15 de abril, se observó una expansión F en los ionogramas de las 21:00 y las 2:00 LT, debilitándose después y no se halla presente en los posteriores.

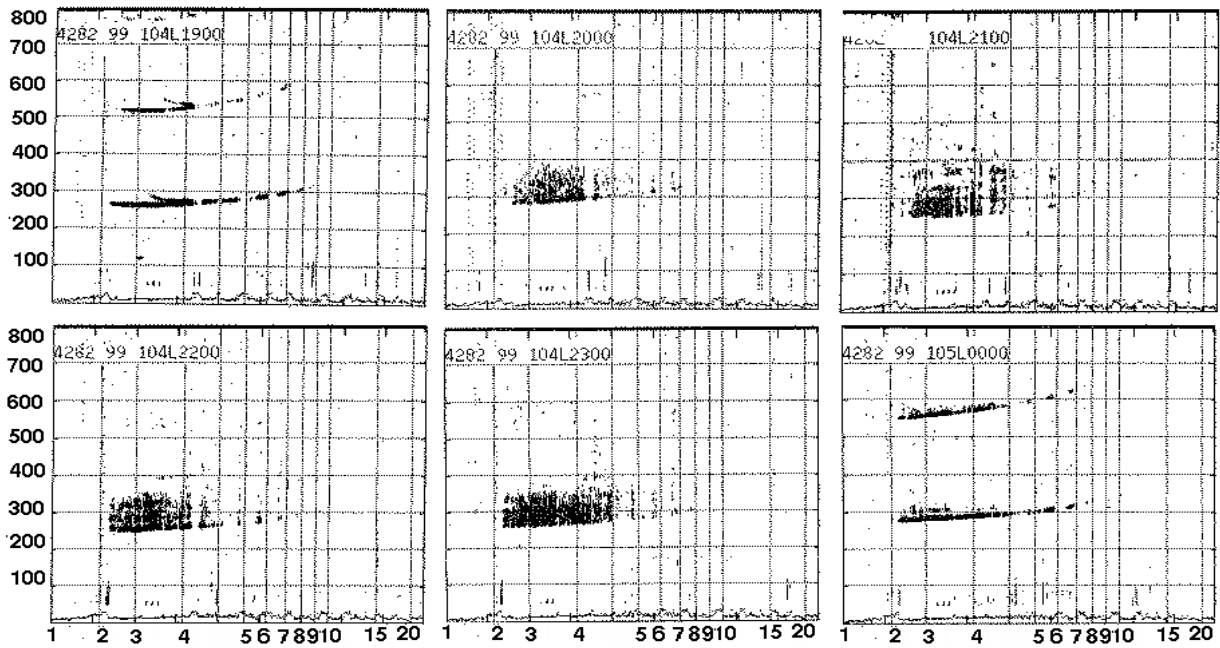


Figura 2. Ionogramas desde Ahmedabad ($23^{\circ}N$, $72.4^{\circ}E$, $16.8^{\circ}N$ Geomag.) tomados respectivamente a las 19:00, 20:00, 21:00, 22:00, 23:00 y 00:00 LT del 14 de abril de 1999.

4. RESULTADOS

La figura 3 muestra una serie de imágenes a $630.0nm$ tomadas el 14 de abril de 1999. Las regiones oscuras (claras) de la imagen corresponden intensidades bajas (altas) del brillo nocturno. Por tanto, se interpretan como zonas de baja (alta) densidad de electrones en la capa de emisión. Esa noche, las observaciones pudieron realizarse sólo desde las 20:50 LT y la primera imagen ya muestra la señal de una disminución de plasma. Se observan claramente dos bandas de disminución en la porción suroccidental de la imagen. La porción norte de la disminución de plasma, que se encuentra hacia el este de la imagen, presenta una bifurcación; la cual se nota claramente en la siguiente imagen (tomada a las 21:15 LT), cuando la disminución se ha desplazado hacia el este. También se ve que la segunda banda, que estaba cerca del borde oeste de la primera imagen, se desplazó hacia el centro. Esta disminución creció más hacia el norte y presentó una apariencia más ondulada, con el extremo sur con una tendencia a desviarse hacia el oeste. La misma imagen muestra también la aparición de una nueva disminución en el extremo occidental del campo de visión. En la siguiente imagen, tomada a las 21:30 LT, se ha desplazado desde el centro, y tomado un aspecto sinusoidal, manteniendo su extremo sur hacia el oeste. A las 21:55 LT la depresión se ha debilitado y llegó al extremo este del campo de visión. Esta disminución de plasma que estaba cerca del centro, se desplazó hacia el este y su extremo norte se bifurcó, a tiempo que otra

disminución de plasma entra al campo de visión desde el lado oeste.

A las 22:10 LT, la disminución de plasma que estaba sobre el borde oriental del campo de visión ha prácticamente desaparecido, y la disminución del este se desplazó aún más hacia el este. Para este tiempo, tiene la forma normal de las disminuciones de plasma. También se nota la aparición de otras dos disminuciones hacia el oeste del campo de visión, las cuales se desplazan hacia el este. Para las 22:55 LT, la imagen muestra que la disminución oriental se desplazó aún más hacia el este, mientras que la disminución del centro muestra una forma más ondulada, con sus extremos norte y sur notoriamente desviados hacia el este. De manera muy interesante, la disminución de plasma de las 22:55 LT, se ha dividido en dos. La porción sur flota hacia el este como una entidad propia, mientras que la porción norte se adhiere a una tercera disminución, que recién aparece. Esta es la primera vez que se observa la división y adhesión de disminuciones de plasma. En las imágenes posteriores se ve que las disminuciones de plasma se desplazan hacia el este, y para las 00:20 LT sólo una pequeña fracción queda dentro del campo de visión, demostrando así que la actividad del plasma sobre el Mt. Abu continuaba por lo menos hasta esa hora. Los ionogramas desde Ahmedabad no muestran ningún desplazamiento F después de las 23:00 LT, lo que demuestra que las irregularidades cruzaron por la latitud de la ciudad entre las 23:00 y la medianoche local.

El 15 de abril, las observaciones comenzaron a las

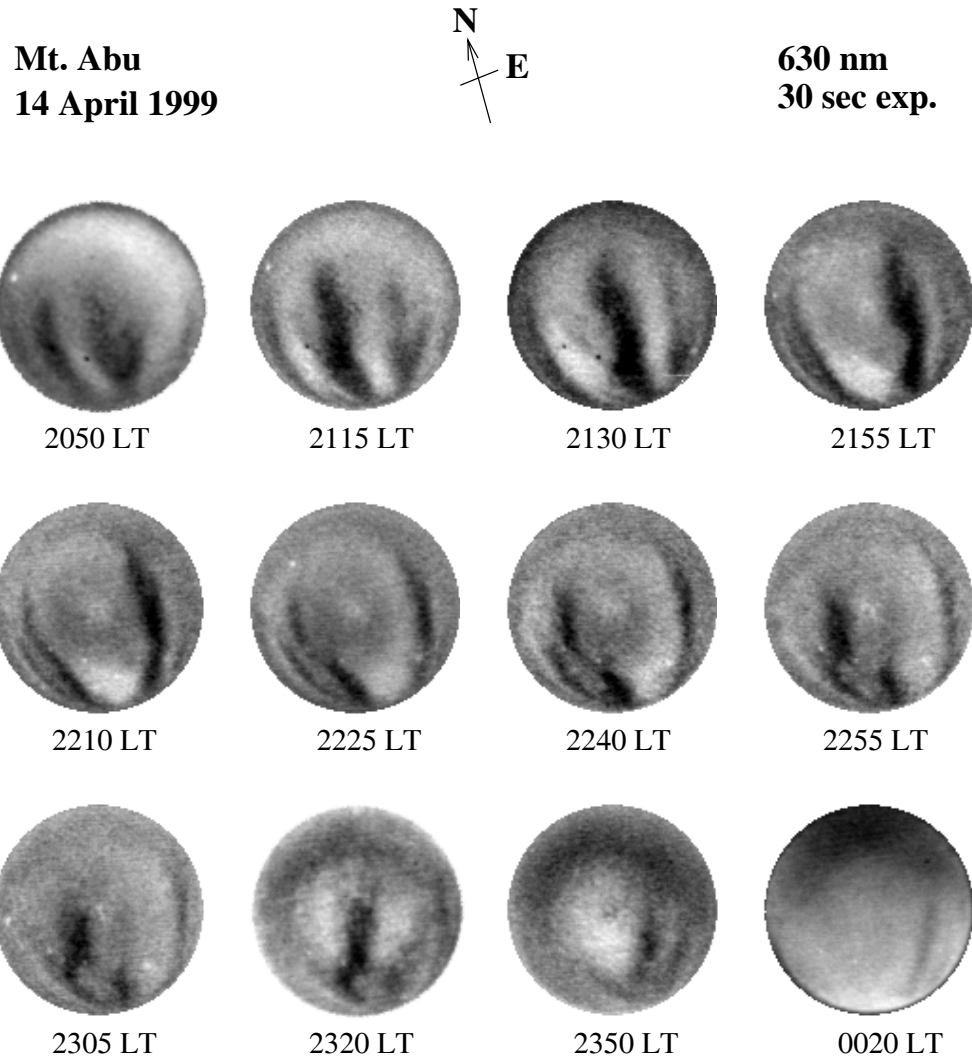


Figura 3. Imágenes de todo el cielo mostrando las disminuciones de plasma vistas desde el Mt. Abu ($24.55^{\circ}N$, $72.71^{\circ}E$, $18.48^{\circ}N$ Geomag.) el 14 de abril de 1999 en la banda de $630nm$. La flecha indica el norte magnético.

20:00 LT. La serie de imágenes de todo el cielo tomadas ese día se muestran en la figura 4, donde se ve la presencia de la disminución de plasma. Esta comienza débilmente en la porción sur del campo de visión a las 20:30 LT; pero a las 21:00 LT se aprecia una cantidad de disminuciones de plasma. Para las 20:30 LT, una disminución de plasma ha ingresado a la porción norte del campo de visión, y se bifurcó para las 21:00 LT. Al contrario de las disminuciones del día anterior, éstas son débiles y sólo se observan en la parte sur de la imagen; y no crecen mucho hacia el norte. Este día se tuvo disminuciones presentes hasta las 23:10 LT, desapareciendo completamente después.

Las observaciones presentadas aquí nos dan la oportunidad de estudiar el límite norte de su desplazamiento respecto de las regiones ecuatoriales, que es donde se producen. Se levantó un mapa del límite norte de las disminuciones de plasma asignándoles una altura correspondiente a las disminuciones sobre el ecuador con el Modelo Internacional Geomagnético de Campo de Referencia

(I.G.R.F.). La disminución de plasma que se muestra en la figura 4, para las 22:10 LT, es la que, aparentemente, ha alcanzado la mayor latitud geomagnética. Nuestros cálculos dan como resultado que la disminución de plasma del 14 de abril de 1999 alcanzó los $23.1^{\circ}N$ de latitud geomagnética. Cuando se mapea ésta disminución en términos de la máxima altura alcanzable en el ecuador, obtenemos una altura de $950km$. Los cálculos similares realizados para la disminución de plasma del 15 de abril de 1999, que fue mucho más débil que la anterior y limitada sólo a la porción sur de las imágenes. La latitud máxima alcanzada por la disminución de plasma de esa noche fue de $17.9^{\circ}N$, lo que corresponde a una altura de $590km$ sobre el ecuador.

También podemos seguir el movimiento hacia el norte de las disminuciones de plasma en las imágenes, hasta que deja el campo de visión. Esos datos fueron utilizados para calcular la velocidad de ascenso de las burbujas de plasma en el ecuador. En la noche del 14 de abril de 1999, la velocidad promedio de ascenso de las burbujas

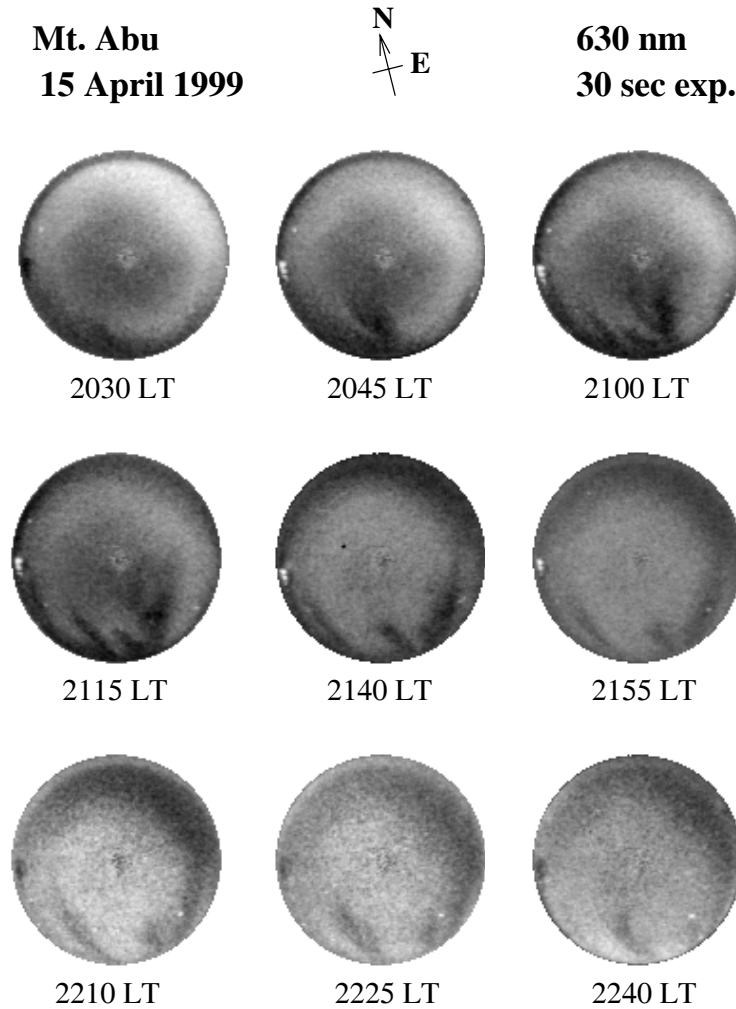


Figura 4. Imágenes de todo el cielo mostrando disminuciones de plasma vistas desde el Mt. Abu ($24.55^\circ N$, $72.71^\circ E$, $18.48^\circ N$ Geomag.) el 15 de abril de 1999 en la banda de $630nm$. La flecha indica el norte magnético.

de plasma fue de $57ms^{-1}$ entre las 20:50 y las 22:55 LT. A la noche siguiente, entre las 20:45 y las 21:15 LT, la velocidad de ascenso fue de $53ms^{-1}$.

También se determinó el punto en el cual se produjeron tanto la bifurcación de la disminución, como la adhesión de las porciones. Para el 14 de abril, corresponde a una altura sobre el ecuador de $400km$.

5. DISCUSIÓN

5.1. Velocidad de ascenso de las burbujas

Las disminuciones de plasma generalmente se forman en regiones con grandes gradientes de la densidad de electrones, las cuales existen normalmente en la atmósfera ecuatorial después del ocaso, siempre y cuando las condiciones ambientales como los vientos neutros, el campo eléctrico, la frecuencia de colisión, etc. sean tales que permitan actuar a los mecanismos generadores de la inestabilidad. Estos mecanismos dejan al plasma tan inestable que cualquier perturbación inicial puede crecer en intensidad y amplitud, dando lugar a toda una gama de irregularidades. Se cree que las disminuciones de plas-

ma se generan en la parte más baja de la región F, a través del mecanismo generalizado de inestabilidad de Rayleigh-Taylor. También se acepta que las ondas de gravedad pueden producir la perturbación inicial en la densidad. Una vez que las disminuciones de plasma se han generado, se mueven hacia arriba y hacia el este. La velocidad de desplazamiento hacia el este es igual a la velocidad de deriva del plasma ambiental, mientras que la velocidad de ascenso depende del porcentaje de perturbación respecto de la densidad media del plasma, la geometría de la burbuja, el campo eléctrico local, etc.

Las disminuciones de plasma que se ven en las imágenes del 14 y 15 de abril de 1999 lucen muy diferentes. Las del 14 cubren casi todo el campo de visión, mientras que las del 15 sólo están en la mitad sur del campo. La diferencia se puede entender considerando las distintas velocidades de ascenso, menor para el día 15. Estas velocidades se calcularon desde el momento que las disminuciones de plasma ingresaron al campo de visión, y no son las causantes para que las disminuciones aparezcan sobre el punto de observación. Fagundes et al. (1997) observaron que mientras algunas disminu-

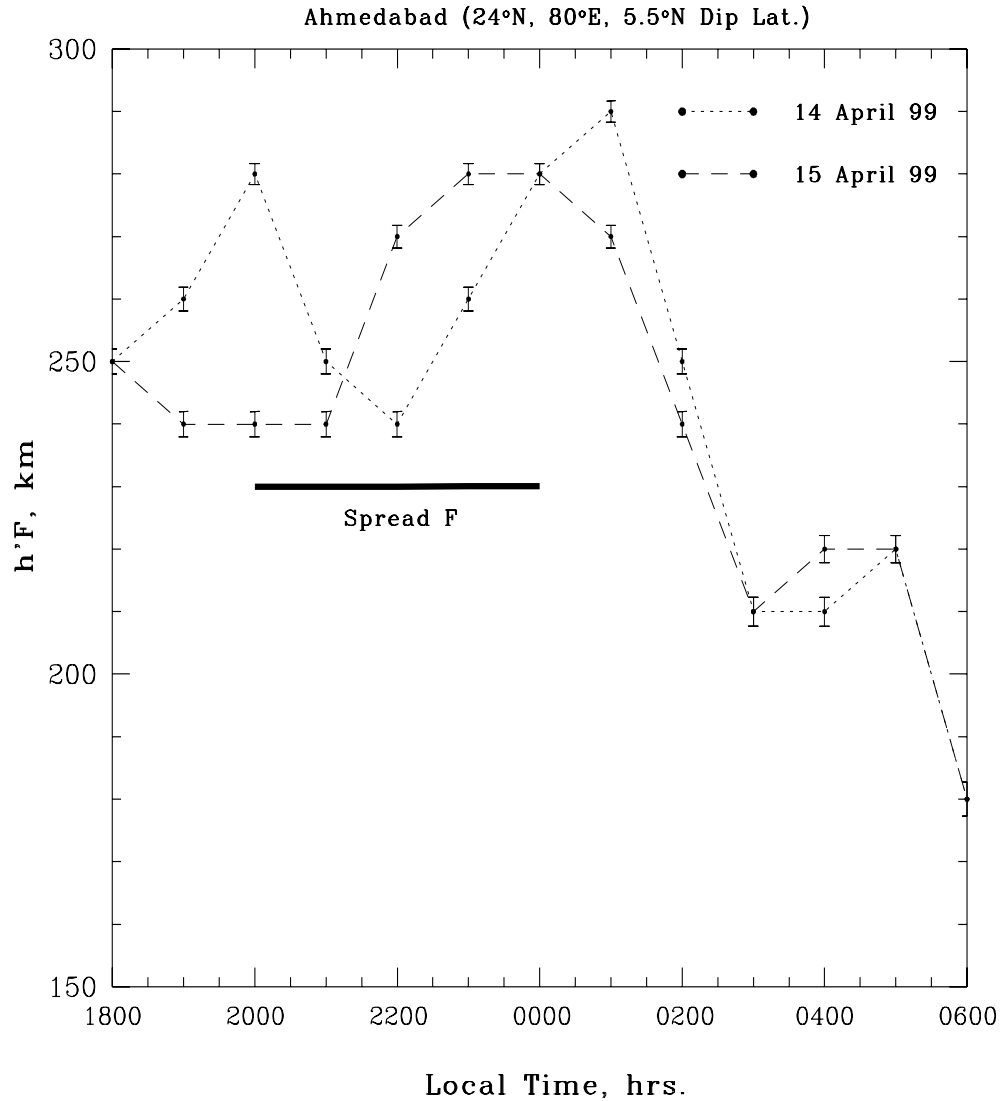


Figura 5. Variaciones de la capa h'F sobre Ahmedabad los días 14 y 15 de Abril de 1999. La línea horizontal indica la duración de la expansión F.

nes de plasma muestran una gran velocidad de ascenso, otras que aparecieron en la misma noche no tienen un movimiento vertical importante. Este fenómeno indica que las disminuciones de plasma que se producen a diferentes tiempos se mueven con diferentes velocidades iniciales, dependiendo de las condiciones iniciales que tenían al formarse.

El trabajo de Ossakow y Chaturvedi (1978) simula los efectos de las condiciones de fondo como el campo eléctrico, la frecuencia de colisión, etc. que éstas tienen

sobre la velocidad de ascenso de las burbujas de plasma a diferentes alturas. Encontraron que el efecto del campo eléctrico es más fuerte a bajas alturas, y a grandes alturas se puede despreciar. El campo eléctrico ambiental también puede afectar el movimiento vertical de las burbujas, si está orientado hacia el este, puede incrementar la velocidad de ascenso, mientras que si está orientado hacia el oeste, tiende a frenar las burbujas de plasma.

La figura 5 muestra el movimiento de la parte inferior de la región F (h'F) durante ambas noches. El 14

de abril, la región F se movió hacia arriba al comenzar el ESF, lo que significa que el campo eléctrico estaba orientado hacia el este. Para el 15 de abril, la base de la región F mostró al comienzo un movimiento hacia abajo, y se mantuvo a baja altura durante las primeras horas de la noche, lo que indica que el campo eléctrico se orientó hacia el oeste durante ese tiempo. Hay que resaltar que la figura 5 está basada sobre la información de los ionogramas tomados en Ahmedabad ($23^{\circ}N$, $72.4^{\circ}E$, $16.8^{\circ}N$ Geomag.) por lo que, en principio, no podrían usarse para inferir las condiciones cerca del ecuador al momento de comenzar las irregularidades. En el ecuador, quien controla la dinámica de plasmas es el campo eléctrico, en cambio, en latitudes extra-ecuatoriales, aparte del campo eléctrico, los vientos neutros tienen un papel importante sobre la dinámica del plasma. El comportamiento de las disminuciones de plasma durante el 14 y 15 de abril de 1999, demuestra que las condiciones del campo eléctrico debieron ser muy similares a las mostradas en la figura 5. El giro del campo eléctrico que ocurrió en ambas noches, no afectó a la velocidad de ascenso de las burbujas debido a que para cuando ocurrió el cambio de orientación, las burbujas se encontraban ya en alturas a las cuales el efecto del campo eléctrico es despreciable, tal como lo demostraron Ossakow y Chaturvedi (1978).

5.2. Esfuerzos de corte en la deriva de plasma

En las imágenes del 14 de abril de 1999, se observó tanto un corte como una nueva adhesión de las disminuciones de plasma. Este es un fenómeno que nunca antes había sido reportado, y lo atribuimos a la aparición de esfuerzos de corte en la velocidad de deriva hacia el este. Aparentemente, la presencia de esos esfuerzos de corte en los extremos norte y sur de la disminución de plasma, las desplazó hacia el este y finalmente las separó en dos unidades diferentes. La porción sur de la disminución de plasma, que se movía con mayor velocidad, se desplazó hacia el este, como si fuese una nueva entidad. En cambio, la porción norte se adhirió a otra disminución de plasma, y se movieron como una sola también hacia el este. Se conoce que existen esfuerzos de corte verticales en los desplazamientos zonales de plasma (Woodman y La Hoz, 1976; Tsunoda et al., 1981; Mendillo y Tyler 1983). Zalesak et al. (1982) demostraron con un modelo no-lineal de las ESF, que la contribución de las líneas de campo a la conductividad de Petersen (proveniente del fondo producido por la región E nocturna en latitudes altas) es capaz de producir esfuerzos de corte en el movimiento del plasma en la dirección este-oeste. Anderson y Mendillo (1983) propusieron la explicación que se debe a que un sistema de vientos zonales, donde la velocidad del viento disminuye con la latitud, podría causar un desplazamiento del plasma hacia el este, el mismo que disminuye con la altura sobre el ecuador magnético.

La evidencia a favor de la presencia de estos esfuerzos de corte se aprecia también en la naturaleza ondulada de algunas de las disminuciones de plasma observadas el 14 de abril de 1999. La inclinación hacia el oeste del

extremo sur de la disminución de plasma que se observó a las 21:15 y a las 21:30 LT, demuestra también que la porción sur tenía mayor velocidad que la porción norte en ese momento. El punto de quiebre de las disminuciones de plasma se ubica en un punto correspondiente a una altura de 400km sobre el ecuador, que resulta estar muy cerca de la región F2.

5.3. Bifurcación de las disminuciones de plasma

Los resultados expuestos en este trabajo, demuestran que el extremo norte de las disminuciones de plasma observadas durante las dos noches se bifurcó. Estas bifurcaciones fueron ya reportadas para imágenes de brillo del aire por Mendillo y Tyler (1983), y también mediante otras técnicas. Tanto Woodman y La Hoz (1976) como Tsunoda et al. (1982) encontraron bifurcaciones de las regiones con menor densidad de plasma a partir de mapas de radar; mientras que Zalesak et al. (1982) encontraron estructuras bifurcadas en los estudios de simulación numérica, y llegaron a la conclusión de que tal caso se presenta cuando se calcula la conductividad de Petersen incluyendo las contribuciones de las regiones E y F. El factor crítico para que se produzca una bifurcación es el cociente de las conductividades interna y externa a las regiones de densidad disminuida. Aggson et al. (1996) reportaron también observaciones *in situ* de burbujas de plasma bifurcadas.

En el caso analizado aquí, la altura a la cual la bifurcación comienza, medida respecto del ecuador, está muy cerca de la región F2. Anderson y Mendillo (1983) calcularon el perfil de la conductividad de Petersen integrada sobre un tubo de flujo y demostraron que si la burbuja de plasma se genera en la base de la región F y se eleva hasta la F2, el cociente de las conductividades es suficiente como para producir una bifurcación. El reporte de Aggson et al. (1996) contiene medidas *in situ* de los campos eléctricos en las ramas que se bifurcan. Los campos eléctricos en las ramas bifurcadas tienen signos opuestos, mostrando así un flujo también opuesto del plasma en cada rama. En el mismo trabajo, también reportan bifurcaciones múltiples de las disminuciones de plasma, con unos patrones muy complejos en cada una de las ramas. Tal como lo indicaron Mendillo y Tyler (1983) nosotros observamos plasmas lineales y con bifurcaciones, uno al lado del otro. Esto es una prueba de que la bifurcación de nuestro caso puede deberse a condiciones estrictamente locales.

La naturaleza de las bifurcaciones, tanto del caso presentado aquí, como de los analizados con anterioridad sugieren que las causas para la bifurcación serían las variaciones locales de los patrones del campo eléctrico local dentro de las burbujas de plasma. Los esfuerzos de cortes en los vientos neutros podrían producir tales cambios en los campos eléctricos, causando la bifurcación. La división y adhesión de las disminuciones de plasma que se observaron en ambas noches de observación indican un gran esfuerzo de corte en el desplazamiento zonal del plasma. Cuando ocurrieron tanto la bifurcación co-

mo la adhesión de las disminuciones de plasma, éstas se encontraban prácticamente fuera del campo de visión del sistema óptico. El tipo de bifurcación de las disminuciones de plasma que se observó en ambas noches demuestra que el mecanismo que las produjo no está comprendido completamente, y se requiere de experimentos coordinados para medir tanto el campo eléctrico como los patrones de flujo del plasma dentro de las zonas de bifurcación, conjuntamente con observaciones efectuadas desde la superficie terrestre.

6. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue patrocinado por el Physical Research Laboratory, Ahmedabad, India.

REFERENCIAS

- [1] Abalde, J.R., P.R.Fagundes, J.A.Bittencourt y Y.Sahai. Observations of equatorial F region plasma bubbles using simultaneous OI 777.4nm and OI 630.0nm imaging: New results, *J. Geophys. Res.*, **106**, 30,331-30,336, 2001.
- [2] Aggson, T.L., H.Laakso, N.C.Maynard y R.F.Pfaff, In situ observations of bifurcation of equatorial ionospheric plasma depletions, *J. Geophys. Res.*, **101**, 5125-5132, 1996.
- [3] Anderson, D.N. y M.Mendillo. Ionospheric conditions affecting the evolution of equatorial plasma depletions, *Geophys.Res.Lett.*, **10**, 541-544, 1983.
- [4] Colerico, M., M.Mendillo, D.Nottingham, J.Baumgardner, J.Meriwether, J.Mirick, B.W.Reinisch, J.L.Scali, C.G.Fesen, y M.A.Biondi, Coordinated measurements of F-region dynamics related to the thermospheric midnight temperature maximum, *J.Geophys. Res.*, **101**, 26,783-26,793, 1996.
- [5] Fagundes, P.R., Y.Sahai, I.S.Batista, M.A.Abdu, J.A.Bittencourt y H.Takahashi, Vertical and zonal equatorial F-region plasma bubble velocities determined from OI 630nm nightglow imaging, *Adv. Space Res.*, **20(6)**, 1297-1300, 1997.
- [6] Mendillo, M. y A.Tyler, Geometry of depleted plasma regions in the equatorial ionosphere, *J. Geophys. Res.*, **88**, 5778-5782, 1983.
- [7] Mendillo, M. y J.Baumgardner, Airglow characteristics of equatorial plasma depletions, *J.Geophys. Res.*, **87**, 7641-7652, 1982.
- [8] Mendillo, M., J.Baumgardner, M.Colerico y D.Nottingham. Imaging science contributions to equatorial aeronomy: initial results from the MISETA program, *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.*, **59**, 1587-1599, 1997a.
- [9] Mendillo, M., J.Baumgardner, D.Nottingham, J.Aarons, B.Renisch, J.Scali y M.C.Kelley, Investigations of thermospheric-ionospheric dynamics with 6300Å images from the Arecibo Observatory, *J. Geophys. Res.*, **102 (A4)**, 7331-7343, 1997b.
- [10] Ossakow, S.L. y P.K.Chaturvedi, Morphological studies of rising equatorial spread F bubbles, *J. Geophys. Res.*, **83**, 2085-2090, 1978.
- [11] Sahai, Y., J.Aarons, M.Mendillo, J.Baumgardner, J.A.Bittencourt y H.Takahashi, OI 630nm imaging observations of equatorial plasma depletions at 16° dip latitude, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **56**, 11,1461-1475, 1994.
- [12] Sales, G.S., B.W.Reinisch, J.L.Scali y C.Doizois. Spread F and structure of equatorial ionisation depletions in the southern anomaly region, *J. Geophys. Res.*, **101**, 26,819-26,827, 1996.
- [13] Sinha, H.S.S. y S.Raizada, Some new features of ionospheric plasma depletions over the Indian zone using all sky optical imaging, *Earth Planets and Space*, **52**, 540-559, 2000.
- [14] Sinha, H.S.S., R.N.Misra, H.Chandra, S.Raizada, N.Dutt y G.D.Vyas, Multi-wavelength optical imaging of ionospheric plasma depletions, *Ind. J. of Rad. and Space Phys.*, **25**, 44-52, 1996.
- [15] Sinha, H.S.S., P.K.Rajesh, R.N.Misra, y N.Dutt. Multi-wavelength imaging observations of plasma depletions over Kavalur, India, *Ann. Geophys.*, **19**, 1119-1131, 2001.
- [16] Tsunoda, R.T., R.C.Livingston y C.L.Rino, Evidence of a velocity shear in bulk plasma motion associated with the post sunset rise of the F layer, *Geophys. Res. Lett.*, **8**, 807-810, 1981.
- [17] Tsunoda, R.T., R.C.Livingston, J.P.McClure y W.B.Hanson, Equatorial plasma bubbles: Vertically elongated wedges from the bottomside F layer, *J. Geophys. Res.*, **87**, 9171-9180, 1982.
- [18] Weber, E.J., S.Basu, T.W.Bullett, C.Valladares, G.Bishop, K.Groves, H.Kuenzler, P.Ning, P.J.Sultan, R.E.Sheehan y J.Aranya. Equatorial plasma depletion precursor signatures and onset observed at 11° south of the magnetic equator, *J. Geophys. Res.*, **101**, 26,829-26,838, 1996.
- [19] Woodman, R.F. y C.La Hoz, Radar observations of F region equatorial irregularities, *J. Geophys. Res.*, **81**, 5447-5466, 1976.
- [20] Zalesak, S.T. y S.L.Ossakow, and P.K.Chaturvedi, Non-linear Equatorial spread F : The effects of neutral winds and background Pederson conductivity, *J. Geophys. Res.*, **87**, 151-166, 1982.

COLAPSO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR EN UN ESPACIO AUTO-SIMILAR

M.J. Lucano¹, J.A.C. Nogales²

*Universidad Mayor de San Andrés, Carrera de Física
Campus Universitario, Calle 27, Cota-Cota
La Paz-Bolivia*

RESUMEN

En el presente trabajo se presentan soluciones analíticas de la ecuación de Einstein mínimamente acoplada a un campo escalar sin masa ϕ . Estas soluciones son utilizadas para la construcción de modelos de colapso del campo escalar. Para ello, se realiza un corte a lo largo de una hipersuperficie tipo tiempo, lo que da lugar a la aparición de un Horizonte Aparente HA y luego se unen estos espacios con un espacio-tiempo de Minkowski. Como resultado, cuando el espacio presenta auto-similaridad continua de la primera clase (homotética), la formación de los agujeros negros se inicia con masa infinitesimal (colapso Tipo II), y la misma se escala en la forma $M \propto P^\gamma$, siendo γ un exponente crítico y P un parámetro que representa la “intensidad” de las condiciones iniciales. Un análisis de los parámetros físicos, muestra que los modelos presentan las mismas generalidades, a saber, la masa se escala como $M \propto P^{1/2}$ y el campo escalar toma la forma $\phi(t) \sim \ln(1 + Pt) + \phi_0$. Asimismo, un análisis de los puntos singulares muestra que en modelos existe una singularidad en $t = -\frac{1}{P}$ que se encuentra detrás del Horizonte Aparente por lo que todos representan el colapso del campo escalar.

1. INTRODUCCIÓN

El colapso gravitacional de una concentración localizada de materia es uno de los temas centrales de la Relatividad General desde sus inicios.

El colapso gravitacional tiene generalmente, cuatro tipos de posibles estados finales. El primero es la detección del proceso para la formación de objetos estelares auto-sustentados, tales como estrellas, enanas blancas o estrellas de neutrones. El segundo es simplemente la dispersión del objeto colapsado que finalmente deja un espacio-tiempo plano. El tercer tipo es la formación de agujeros negros con materia y radiación saliente, mientras que el cuarto es la formación de singularidades desnudas. Para el último caso, sin embargo, la Hipótesis de la Censura Cósmica establece que las singularidades desnudas no ocurren en la naturaleza [22]. El estudio del colapso gravitacional ha sido guiado principalmente por estas cuatro posibilidades.

En años recientes se ha hecho evidente que existe una fenomenología intrigante en el umbral de la formación de un agujero negro producto del colapso, y más recientemente, este problema ha atraído la atención, debido al descubrimiento por parte de M. Choptuik (1993), que trabajó con el campo escalar sin masa ϕ , de fenómenos “críticos” que hasta ahora eran desconocidos [5].

Usando un método numérico muy sofisticado, Choptuik encontró que, dejando la distribución inicial del campo escalar parametrizado suavemente por un parámetro P que caracteriza la intensidad de la

interacción gravitacional de las condiciones iniciales, el colapso del campo escalar con los datos iniciales $P > P_*$ (solución supercrítica) forma un agujero negro, mientras que el conjunto con $P < P_*$ (solución subcrítica) no. Así surgían las siguientes características: (a) las soluciones cuasi-críticas ($P \sim P_*$) se aproximan a un atractor llamado “solución crítica”, el cual es *universal* en el sentido de que todas las familias de soluciones consideradas que dependen de un parámetro, se aproximan a un espacio-tiempo idéntico, (b) la solución crítica es periódica en una escala logarítmica en el espacio-tiempo, con un período de $\Delta \sim 3.44$; esto es referido usualmente como un “eco” o auto-similaridad discreta (DSS), (c) cerca de la solución crítica (pero con $P > P_*$), la masa del agujero negro está dada por:

$$M_{BH} = K (P - P_*)^\gamma,$$

donde K es una constante que depende de la familia de datos iniciales y γ es un exponente crítico que toma el valor $\gamma \sim 0.36$. Invariancia de escala, universalidad de las soluciones y escalamiento a alguna potencia sugiere un fenómenos críticos.

El fenómeno descubierto por Choptuik, fue rápidamente encontrado en modelos analíticos en el colapso de ondas gravitacionales aximétricas [1], en el fluido de radiación y en otros modelos de materia [7]. Por tanto, la aparición de este tipo de fenómeno no se debe a una elección particular del tipo de materia, sino más bien, es una característica genérica de la Relatividad General. Evidencia numérica adicional para sustentar esta conclusión puede ser encontrada en [9] y [20].

¹ Email: mlucano@cbpf.br

² Email: jnogales@fiums.edu.bo

Los estudios analíticos, han demostrado la universalidad de la solución crítica y su auto-similaridad (continua CSS ó discreta DSS) en la mayoría de los casos, sin embargo, se ha encontrado que γ depende fuertemente del tipo de materia considerado y el tipo de auto-similaridad que presenta el espacio-tiempo.

Sería muy útil el entender la universalidad de este fenomeno analíticamente. Una aproximación es el tratar de encontrar una solución exacta que describa el colapso gravitacional y observar el comportamiento crítico a través del cálculo de la masa del agujero negro. Claro esta que, debido a la complejidad matemática de la ecuación de campo de Einstein, frecuentemente se deben imponer algunas simetrías en los sistemas considerados (una simetría impuesta usualmente es que el espacio sea esféricamente simétrico) con el propósito de hacer el problema tratable.

Es justamente esto lo que se hará en este trabajo, se presentarán tres clases de soluciones exactas de la ecuación de Einstein mínimamente acoplado con el campo escalar sin masa ϕ (el mismo que utilizó Choptuik), y luego se estudiarán sus propiedades físicas a través de un modelamiento del espacio-tiempo para observar el escalamiento de la masa del agujero negro con respecto a un parámetro P . Para derivar estas soluciones, se asumirá que los espacios son esféricamente simétricos y continuamente auto-similares (CSS).

Los modelos presentados por ser auto-similares, no son asintóticamente planos y la masa del agujero negro crece indefinidamente. Para resolver este problema, se hará una “cirugía” en el espacio-tiempo, usando el formalismo de W. Israel [19]. Se cortará el espacio-tiempo a lo largo de una hipersuperficie y luego se la unirá a un espacio plano, así el espacio-tiempo resultante será asintóticamente plano y tendrá una masa finita. Estos modelos, producto del proceso de “cortar y pegar” [23], son más realistas y comparables al de Choptuik pero con diferente auto-similaridad.

Para la obtención de los modelos, se ha organizado el presente estudio de la siguiente manera. La Sección 2 se avoca a una explicación del fenómeno descubierto por Choptuik, justificando la elección del modelo de materia y el tipo de auto-similaridad. La Sección 3 introduce los parámetros de análisis y los casos de estudio. La Sección 4 presenta los modelos encontrados a través de la imposición de condiciones físicas y geométricas, los cuales presentan el escalamiento de la masa y el correspondiente análisis. Finalmente este estudio termina en la Sección 5 donde las conclusiones principales son presentadas.

2. AUTO-SIMILARIDAD EN EL COLAPSO GRAVITACIONAL

A un nivel heurístico, la existencia del fenómeno crítico en el sistema [24] y en otros modelos es un resultado directo de la *competición* en la dinámica del sistema. La naturaleza de esta competición puede ser entendida a través de la pregunta: dados los datos iniciales genéricos (entendiéndose como datos genéricos a aquellos que al

ser seleccionados, hacen que el sistema se comporte de manera regular) ¿Dónde acaba la energía del sistema en un tiempo posterior? En términos aproximados, la energía cinética del campo tiende a dispersar el mismo hasta el infinito, mientras que la energía potencial gravitacional (enteramente auto-inducida), si es suficientemente dominante durante el colapso, capturará alguna cantidad de masa-energía del sistema. El hecho clave, es que la competición dinámica puede ser controlada a través del ajuste de un parámetro en las condiciones iniciales.

2.1. Auto-similaridad Discreta y Continua

Los sistemas que exhiben auto-similaridad aparecen idénticos en diferentes escalas temporales y/o espaciales, y generalmente surgen en situaciones físicas en las cuales no existen escalas de longitud naturales. En el caso de la Relatividad General, la auto-similaridad puede ser discreta (DSS) o continua (CSS), y ambos tipos han sido observados en el colapso gravitacional. Por ejemplo, la solución crítica encontrada por Choptuik para el campo escalar ϕ esféricamente simétrico es periódico en escala o discretamente auto-similar (DSS), mientras que otras soluciones críticas, por ejemplo, para un fluido perfecto esférico, son invariantes de escala, o continuamente auto-similares (CSS) [4].

Una auto-similaridad continua (CSS) en el espacio-tiempo en el contexto de la Relatividad General corresponde a la existencia de un campo de vectores homotéticos ξ , definidos por la propiedad [3]:

$$L_{\xi}g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}, \quad (1)$$

la cual conforma, de acuerdo a la dimensión y a las simetrías del espacio, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Por otra parte, un espacio-tiempo es discretamente auto-similar (DSS) si existe un difeomorfismo Φ y una constante real Δ tal que:

$$\Phi^*g_{\mu\nu} = e^{2\Delta}g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

donde Φ^*g_{ab} es el inverso (*pull-back*) de g_{ab} bajo el difeomorfismo Φ [12].

En el presente estudio se trabajará con la auto-similaridad continua (1), ya que para obtener resultados analíticos con una auto-similaridad discreta, el trabajo debe ser numérico [20] como en el caso de Choptuik, y en nuestro caso lo que se busca, más bien, son soluciones exactas de la ecuación de Einstein.

2.2. Clasificación Según la Auto-Similaridad y el Tipo de Masa

Existen dos tipos de comportamiento con respecto a la masa del agujero negro que se forma en el colapso, lo que depende del conjunto inicial de datos. En uno de estos, la formación del agujero negro comienza con una masa infinitesimal que además, presenta el fenómeno de escalamiento, dominada por una solución crítica tipo DSS. En el otro tipo, la formación del agujero negro

comienza con una masa finita, y la solución es estática y asintóticamente plana. Choptuik, Chmaj y Bizon [6], nombraron los dos tipos de comportamiento crítico como Tipo I y Tipo II respectivamente, que corresponden a las transiciones de fase de segundo y primer orden.

Una vez que Choptuik descubrió el fenómeno de escalamiento de la masa, resultados similares fueron encontrados para una variedad de campos de materia. En algunos de estos, nuevos fenómenos cualitativos fueron descubiertos [8]. Cada aspecto del escenario básico: CSS y DSS, universalidad y escalamiento se aplica directamente a la solución crítica en una simetría esférica, sin embargo, como consecuencia de otros estudios (perturbaciones no esféricas en el fluido perfecto y en el campo escalar [3], y en el vacío aximétrico [1]), surgen dos preguntas relacionadas: ¿son los ya conocidos fenómenos críticos en la simetría esférica destruidos por pequeñas desviaciones de ésta? y, ¿existen fenómenos críticos en el colapso gravitacional lejos de la simetría esférica?, estas preguntas aún no han sido completamente contestadas.

3. PARÁMETROS Y CONDICIONES DE ANÁLISIS

A continuación se presentarán los parámetros físicos y matemáticos para el análisis de las soluciones de la ecuación de Einstein y las condiciones físicas y geométricas que nos ayudaran a discernir entre aquellos modelos que son aceptables de aquellos que no. Se utilizarán técnicas estándares [23] para estudiar el punto crítico para la formación de un agujero negro o de una singularidad. Asimismo, se impondrán ciertas restricciones sobre la dependencia funcional de las soluciones con respecto a la coordenada espacial y temporal, que reducirán el número de casos de estudio y permitirán la resolución de las ecuaciones diferenciales planteadas de forma directa.

3.1. Parámetros de Análisis

Un espacio-tiempo simétricamente esférico, es descrito por la métrica [14]:

$$ds^2 = -N^2(r, t)dt^2 + U(r, t)dr^2 + V(r, t)d\Omega^2. \quad (3)$$

El Horizonte aparente y función de masa se los introduce como sigue: Poisson e Israel [19] elaboraron una generalización para la *Función de Masa* que, en ausencia de carga eléctrica, toma la forma:

$$1 - \frac{2m(t, r)}{r_{ph}} = g^{\mu\nu} r_{ph, \mu} r_{ph, \nu}. \quad (4)$$

La definición anterior generaliza el horizonte de eventos en la métrica de Schwarzschild y permite otras generalizaciones; por ejemplo, sobre el horizonte aparente (HA) debe cumplirse:

$$1 - \frac{2m(t, r)}{r_{phA}} = 0, \quad (5)$$

o equivalentemente:

$$g^{\mu\nu} r_{phA, \mu} r_{phA, \nu} = 0, \quad (6)$$

la relación (5) define también el radio físico del Horizonte Aparente r_{HA} que es nuestro segundo parámetro de análisis. La masa encerrada dentro del Horizonte Aparente está dada por:

$$M_{HA} = \frac{1}{2} r_{phA}. \quad (7)$$

Se usa el invariante de Kretschmann $K \equiv R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ y el escalar curvatura para el análisis de los puntos singulares de los modelos ya que permite la identificación de singularidades reales en el espacio-tiempo.

3.2. Condiciones Geométricas

La ecuación de campo de Einstein para un campo escalar sin masa ϕ puede ser escrita como [15]:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\phi_{, \mu} \phi_{, \nu}. \quad (8)$$

Las ecuaciones de Einstein imponen condiciones geométricas sobre el campo escalar, la primera condición geométrica es la condición de simetría. Si el espacio-tiempo tiene simetría esférica, la dependencia funcional de un campo escalar isotrópico deberá darse sólo en términos de las coordenadas t y r , es decir:

$$\phi = \phi(t, r), \quad (9)$$

por tanto, la condición de simetría esférica, a partir de la ecuación (8) se traduce en:

$$R_{22} = 0, \quad (10)$$

$$R_{33} = 0. \quad (11)$$

Al analizar las otras componentes del tensor de Ricci aparece la segunda condición geométrica o condición de integración del campo escalar,

$$R_{00}R_{11} - R_{01}^2 = 0. \quad (12)$$

La ecuación (12) es la condición de integración del campo escalar que se utilizará para encontrar las soluciones que satisfagan la ecuación de Einstein. Sin embargo, la resolución de ésta es bastante compleja, pues se constituye en una ecuación diferencial no lineal de cuarto orden, de una o más funciones dependientes de dos variables, por lo que se estudiarán casos especiales que permitirán su resolución de manera directa como se explica más adelante.

El fenómeno de escalamiento de la masa $M_{BH} \sim (P - P_*)^\gamma$ del agujero negro que se forma del colapso de un campo de materia, se produce en los espacios que presentan auto-similaridad ya sea discreta o continua; para el presente estudio, además de las dos condiciones geométricas anteriores, se estudiará el caso en el que las soluciones cumplan la condición de ser continuamente auto-similares (ec. (1)).

Debido a la simetría esférica, podemos escribir los vectores de Killing ξ^μ como:

$$\xi^\mu = \xi^0 \delta_t^\mu + \xi^1 \delta_r^\mu, \quad (13)$$

cuando se desarrolla la condición (1) para que pueda ser aplicada a una métrica general con simetría esférica, se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}\nabla_0 \xi^0 &= 1, \\ g_{00} \nabla_1 \xi^0 + g_{11} \nabla_0 \xi^1 &= 0, \\ \nabla_1 \xi^1 &= 1.\end{aligned}\quad (14)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (14) deben tener una solución no trivial para que se verifique que nuestro espacio-tiempo sea continuamente auto-similar, es decir, debe ser posible encontrar vectores de Killing ξ^0 y ξ^1 tal que satisfagan este sistema.

3.3. Condiciones Físicas

Para lograr el objetivo de la construcción de un modelo físico completo para el colapso gravitacional, es necesario, en algunos casos, limitar la presencia de materia a una región del espacio-tiempo. Un método para lograr esto es 'cortar' el espacio a lo largo de una hipersuperficie tipo tiempo $r = r_0(t)$, y luego 'pegar' la región $r \leq r_0(t)$ con otro tipo de espacio en $r \geq r_0(t)$.

De la función de masa (4) se observa que, por ser esta una función de r y t , en principio, no está localizada, y dependiendo de la forma funcional que tome puede extenderse hasta el infinito, por ello en nuestro caso se harán decaer las soluciones de la ecuación de Einstein, cualquiera sea su forma, a una métrica de Minkowski (espacio plano) a partir del ajuste de uno o más parámetros que provengan de la solución misma, es decir:

$$ds^2 \rightarrow ds_M^2, \quad (15)$$

en nuestro caso se unirá el espacio-tiempo en $r \leq r_0(t)$ con el espacio-tiempo de Minkowski en $r \geq r_0(t)$, para luego pasar a estudiar los parámetros físicos y el colapso en sí.

Para observar el escalamiento de la masa se debe garantizar también la existencia de un horizonte aparente, es decir, la existencia de una hipersuperficie tipo tiempo $r = r(t)$ tal que, encerrada dentro de ésta se encuentre la masa del agujero negro y al ser combinada con la función de masa (4), para un valor fijo de $r = r_0$ (cortamos el espacio en r_0), se obtiene una masa que dependa no solo de r_0 sino también de un parámetro que identifique la intensidad de las condiciones iniciales³ (por ejemplo P):

$$M = M_{BH}(r_0, P). \quad (16)$$

De la relación (7) y tomando en cuenta la métrica (3) se infiere, para que exista un Horizonte Aparente en el caso dinámico, que V debe ser necesariamente función de r y t :

$$V = V(r, t), \quad (17)$$

³El proceso en sí consiste en eliminar la variable t utilizando $r(t)$ y $m(t, r)$, fijando el valor de r a r_0 , es decir, intersectar ambas funciones en el tiempo y limitar así la presencia de materia, lo que se hace evidente al construir el diagrama de Penrose correspondiente al modelo.

las funciones N y U de la métrica, dependiendo de los casos de estudio, pueden ser funciones de r , funciones de t , de ambas variables o ser constantes, pero $V(r, t)$ debe ser necesariamente función de r y t . Para las diferentes combinaciones existen dieciseis soluciones [15].

3.4. Soluciones

Ya que las condiciones geométricas están dadas en términos de las componentes del tensor de Ricci, se calculan estas directamente [15].

Debe tomarse en cuenta que de las cinco componentes del tensor de Ricci que son distintas de cero, sólo cuatro son independientes ya que:

$$R_{22} = \sin^{-2}\theta R_{33} = 0 \quad (18)$$

es por ello que ni la condición de integración ni la de simetría toman en cuenta la componente R_{33} . Para simplificar la notación, abreviaremos la condición de integración del campo escalar (12) con el símbolo:

$$\Sigma \equiv R_{00}R_{11} - R_{01}^2 = 0. \quad (19)$$

Las primeras condiciones que deben cumplir las funciones N , U y V de la métrica (3) son las geométricas, para luego pasar a examinarlas y verificar que cumplen con las condiciones físicas, ya que de antemano no se conoce su forma funcional. Esto implica que para poder encontrar las soluciones primero debe resolverse el sistema de ecuaciones (8) y (14). Como se observa, resolver este sistema de manera general resulta complicado, por lo que se impondrán ciertas restricciones sobre la dependencia de N , U y V con respecto a la coordenada radial r y la coordenada temporal t .

Con respecto al campo escalar, este puede depender sólo de t , ó de r y t simultáneamente, ya que el caso en el que ϕ depende sólo de r no representa ningún tipo de colapso (el campo no evoluciona en el tiempo). El considerar el caso en el que ϕ depende de ambas variables es equivalente a considerar los dieciseis casos de estudio, volviendo al problema de resolver en forma general (8) y (14), razón por lo que se estudiará el caso en el que ϕ depende de t :

$$\phi = \phi(t). \quad (20)$$

El imponer a ϕ como función de t , implica que también debe cumplirse:

$$R_{01} = 0, \quad (21)$$

como consecuencia de la ecuación (12).

Con respecto a la función $R(r)$ se la propondrá como $R(r) = r^2$ por la siguiente razón. Analizando la métrica general con simetría esférica (3), se observa que la componente que acompaña a $d\Omega^2$ es igual a r^2 ; ya que en nuestro caso requerimos que esta componente sea función de r y t , una opción razonable, que generaliza esta métrica, es elegir la función V como $V(t, r) = r^2 f(t)$.

Al hacer una análisis mas detallado de las diferentes combinaciones se obtienen dos casos de estudio, con las respectivas componentes de Ricci calculadas y la condición de integración [15].

Este procedimiento de utilizar las componentes de Ricci, en lugar de la ecuación de Einstein directamente, es válido y equivalente, ya que en nuestro caso se resuelve la ecuación de Einstein en el sentido “inverso”. En el caso de resolver la ecuación de Einstein directamente, se supone la forma de la materia; en nuestro caso, más bien se recurre a la ecuación de Einstein para encontrar la forma de la materia, es decir, del campo y la métrica. A través de las condiciones geométricas y físicas impuestas a las soluciones se ‘modela’ la geometría del espacio-tiempo, tal que se forma un Horizonte Aparente y encerrado dentro de este se encuentra la materia, entonces, al cumplir las diferentes condiciones, el campo escalar finalmente cumple la solución y la métrica así determinada, satisface la ecuación de Einstein directamente porque no se tiene que hacer ninguna imposición sobre el campo.

4. MODELOS

4.1. Primer Modelo

Este modelo corresponde al caso en el cual:

$$N_{(r,t)} = 1, \quad (22)$$

$$U_{(r,t)} = f_{(t)}, \quad (23)$$

$$V_{(r,t)} = r^2 f_{(t)}. \quad (24)$$

Se debe encontrar una solución que satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales $R_{22} = 0$, $\Sigma = 0$ estas, después de ser simplificadas pueden escribirse como:

$$R_{22} = \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 = 0, \quad (25)$$

$$\Sigma = \frac{1}{4} \frac{1}{f^2} \left(\frac{df}{dt} \right)^4 - \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)^2 = 0, \quad (26)$$

la ecuación (26), puede ser escrita como:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \mp \frac{1}{2f} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 = 0, \quad (27)$$

comparando (27) y (25) vemos que el sistema de ecuaciones diferenciales tendrá una solución si elegimos el signo + en la ecuación (27), con lo que se obtiene una sola ecuación diferencial:

$$2f \frac{d^2 f}{dt^2} + \left(\frac{df}{dt} \right)^2 = 0. \quad (28)$$

Al resolver (28) se obtiene:

$$f_{(t)} = (C_1 t + C_2)^{2/3}, \quad (29)$$

con lo que la métrica (3) toma la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + (C_1 t + C_2)^{2/3} dr^2 + (C_1 t + C_2)^{2/3} r^2 d\Omega^2, \quad (30)$$

la métrica (30) decae a la métrica de Minkowski:

$$ds_M^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

si los parámetros C_1 y C_2 se ajustan como $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$. En lo que concierne a este modelo, se mantendrá la constante C_2 igual a uno, lo que no afecta a ninguno de los cálculos posteriores.

La función de masa está dada por:

$$1 - \frac{2m_{(r,t)}}{R} = R_{,\alpha} R_{,\beta} g^{\alpha\beta} = R_{,0}^2 g^{00} + R_{,1}^2 g^{11}, \quad (31)$$

entonces la función de masa resultante es:

$$m_{(r,t)} = \frac{C_1^2 r^3}{18(C_1 t + 1)}, \quad (32)$$

y el Horizonte Aparente se obtiene haciendo $R_{,\alpha} R_{,\beta} g^{\alpha\beta} = 0$, lo que resulta en:

$$r_{HA} = \frac{3}{C_1} (C_1 t + 1)^{2/3}. \quad (33)$$

Al hacer el corte en un radio finito r_0 , la masa encerrada dentro del Horizonte Aparente es:

$$M_{BH} = \frac{(3r_0)^{3/2}}{18} C_1^{1/2},$$

si hacemos $C_1 = P$ es decir, identificamos C_1 con la intensidad de las condiciones iniciales, obtenemos:

$$M_{BH} = \frac{(3r_0)^{3/2}}{18} P^{1/2}. \quad (34)$$

Escribimos nuevamente la métrica como:

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + Pt)^{2/3} dr^2 + (1 + Pt)^{2/3} r^2 d\Omega^2, \quad (35)$$

y dejamos que los demás parámetros físicos esten en función del parámetro P .

Utilizando (8) calculamos la forma del campo escalar, que en nuestro caso, debido a que las componentes del tensor de Ricci son nulas excepto R_{00} , es:

$$\phi_{,t}^2 = \frac{1}{8\pi} R_{00}, \quad (36)$$

$$\phi_{,t}^2 = \frac{1}{12\pi} \frac{P^2}{(1 + Pt)^2}, \quad (37)$$

integrando (37) obtenemos:

$$\phi_{(r,t)} = \pm \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \ln(1 + Pt) + g_{(r)}, \quad (38)$$

sin embargo, si imponemos la condición:

$$\phi_{(t=0,r)} = \phi' \quad (39)$$

es decir la existencia de un campo escalar al inicio del colapso, no localizado, se obtiene:

$$\phi_{(t)} = \pm \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \ln(1 + Pt) + \phi_0. \quad (40)$$

Para encontrar los vectores de Killing, hacemos la proposición $\xi^1 = Ar + B$, donde los valores de A y B

deben obtenerse de las ecuaciones diferenciales e introduciendola en el sistema de ecuaciones diferenciales (14), obtenemos:

$$\xi^0 = \frac{1 + Pt}{P} \quad (41)$$

$$\xi^1 = \frac{2}{3}r. \quad (42)$$

El invariante de Kretschmann y el escalar curvatura son, respectivamente:

$$K = \frac{20}{27} \frac{P^4}{(1 + Pt)^4} \quad (43)$$

$$R = -\frac{2}{3} \frac{P^2}{(1 + Pt)^2}. \quad (44)$$

De estos invariantes se observa que existe un punto singular en $t = -\frac{1}{P}$. El diagrama de Penrose de este espacio-tiempo se muestra en la Figura 1.

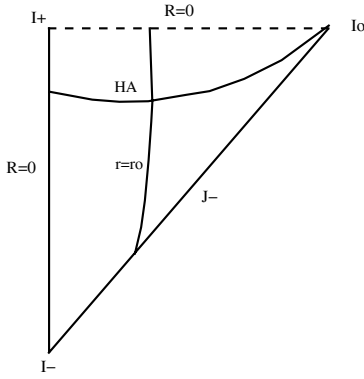


Figura 1. Diagrama de Penrose que muestra el horizonte aparente (HA) y la singularidad (en línea cortada) para el Primer Modelo.

4.2. Segundo Modelo

Este modelo corresponde al caso en el cual:

$$N_{(r,t)} = f_{(t)}, \quad (45)$$

$$U_{(r,t)} = f_{(t)}, \quad (46)$$

$$V_{(r,t)} = r^2 f_{(t)}, \quad (47)$$

las condiciones de simetría y de integración son respectivamente:

$$R_{22} = \frac{1}{2f} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 - \frac{d^2 f}{dt^2} = 0, \quad (48)$$

$$\Sigma = \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)^2 - \frac{1}{4f^2} \left(\frac{df}{dt} \right)^4 = 0, \quad (49)$$

expresamos (49) en la forma:

$$\frac{1}{2f} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 \mp \frac{d^2 f}{dt^2} = 0, \quad (50)$$

comparando (48) y (50) vemos que el sistema de ecuaciones diferenciales tendrá una solución si elegimos el signo $-$ en la ecuación (50), con lo que se obtiene una sola ecuación diferencial:

$$2f \frac{d^2 f}{dt^2} - \left(\frac{df}{dt} \right)^2 = 0, \quad (51)$$

(en este caso el signo elegido es el opuesto a aquel de la ecuación (27)).

Al resolver (51), se obtiene:

$$f_{(t)} = (C_1 t + C_2)^2, \quad (52)$$

con lo que la métrica toma la forma:

$$ds^2 = -(C_1 t + C_2)^4 dt^2 + (C_1 t + C_2)^2 dr^2 + (C_1 t + C_2)^2 r^2 d\Omega^2 \quad (53)$$

nuevamente, la métrica (53) decae a la métrica de Minkowski si $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$ y mantenemos $C_2 = 1$, como en la anterior métrica.

Realizando un cálculo similar al primer modelo se obtiene la función de masa:

$$m_{(t,r)} = \frac{C_1^2 r^3}{2 (C_1 t + 1)^3}, \quad (54)$$

y el Horizonte Aparente:

$$r_{HA} = \frac{(C_1 t + 1)^2}{C_1}. \quad (55)$$

La masa encerrada dentro del Horizonte Aparente es:

$$M_{BH} = \left(\frac{r_0}{2^{2/3}} \right)^{3/2} C_1^{1/2},$$

nuevamente identificamos $C_1 = P$ con la intensidad de las condiciones iniciales, así:

$$M_{BH} = \left(\frac{r_0}{2^{2/3}} \right)^{3/2} P^{1/2}. \quad (56)$$

Expresando la métrica en función del parámetro P :

$$ds^2 = -(1 + Pt)^4 dt^2 + (1 + Pt)^2 dr^2 + (1 + Pt)^2 r^2 d\Omega^2. \quad (57)$$

Utilizando (36) e imponiendo la condición (39), se obtiene el campo escalar:

$$\phi_{(t)} = \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \ln(1 + Pt) + \phi_0. \quad (58)$$

Proponiendo nuevamente $\xi^1 = Ar + B$, para los vectores de Killing se obtiene la solución:

$$\xi^0 = \frac{1}{3} \frac{(1 + Pt)}{P}, \quad (59)$$

$$\xi^1 = \frac{2}{3}r. \quad (60)$$

El invariante de Kretchmann y el escalar curvatura para este espacio son, respectivamente:

$$K = \frac{60P^4}{(1+Pt)^{12}} \quad (61)$$

$$R = -\frac{6P^2}{(1+Pt)^6}. \quad (62)$$

de los que se observa que existe un punto singular en $t = -\frac{1}{P}$. El diagrama de Penrose de este espacio-tiempo se muestra en la Figura 2.

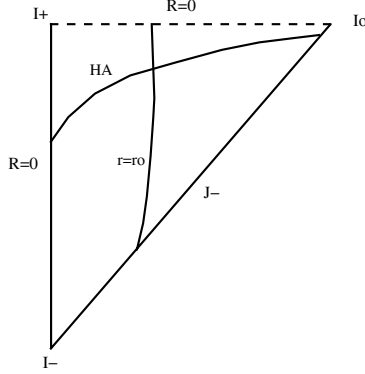


Figura 2. Diagrama de Penrose que muestra el horizonte aparente (HA) y la singularidad (en línea cortada) para el Segundo Modelo.

4.3. Tercer Modelo

Tomando como ejemplo los modelos anteriores, se pudo encontrar un tercer modelo. Sin embargo, en este se “propusieron” funciones N , U y V y se utilizó el método de prueba y error, para verificar que estas cumplieren con las condiciones geométricas y físicas.

Se propusieron las siguientes funciones:

$$N_{(r,t)} = f_{(t)}, \quad (63)$$

$$U_{(r,t)} = \frac{1}{1+Pt}, \quad (64)$$

$$V_{(r,t)} = \frac{r^2}{1+Pt}, \quad (65)$$

las condiciones de simetría y de integración son, respectivamente:

$$R_{22} = \frac{1}{2} \frac{r^2 P}{f_{(t)}^3 (1+Pt)^2} \left(\frac{df}{dt} \right) + \frac{5}{4} \frac{r^2 P^2}{f_{(t)}^2 (1+Pt)^3} = 0 \quad (66)$$

$$\Sigma = \frac{15}{4} \frac{P^2}{(1+Pt)^2} + \frac{1}{f^2} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{4P}{f(1+Pt)} \left(\frac{df}{dt} \right) = 0, \quad (67)$$

combinando (66) y (69), se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{5P}{(1+Pt)} + \frac{2}{f} \left(\frac{df}{dt} \right) = 0, \quad (68)$$

que se integra facilmente:

$$f_{(t)} = \frac{C}{(1+Pt)^{5/2}}, \quad (69)$$

así, la métrica de este espacio-tiempo toma la forma:

$$ds^2 = -\frac{C^2}{(1+Pt)^5} dt^2 + \frac{dr^2}{(1+Pt)} + \frac{r^2}{(1+Pt)} d\Omega^2, \quad (70)$$

esta métrica decae a la de Minkowski cuando $C = 1$ y $P = 0$. Nuevamente se mantendrá el valor de C igual a 1. El invariante de Kretchmann y el escalar curvatura son, respectivamente:

$$K = \frac{15P^4}{4} (1+Pt)^6, \quad (71)$$

$$R = -\frac{3P^2}{2} (1+Pt)^3. \quad (72)$$

Debe notarse que, al analizar los invariantes, se observa la aparición de ninguna singularidad en $t \rightarrow \infty$. Para analizar adecuadamente las cantidades físicas hacemos el siguiente cambio de variable:

$$f(t)dt = dT, \quad (73)$$

donde la función $f(t)$ está dada por (69). Al integrar (73) se obtiene:

$$(1+Pt) = \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} (1+PT)^{-2/3}, \quad (74)$$

ahora, expresando la métrica y los parámetros físicos en función de esta nueva variable temporal se obtiene la métrica:

$$ds^2 = -dT^2 + (1+PT)^{2/3} dr^2 + (1+PT)^{2/3} r^2 d\Omega^2, \quad (75)$$

la función de masa:

$$m_{(r,t)} = \frac{r^3 P^2}{6(1+PT)}, \quad (76)$$

el Horizonte Aparente:

$$r_{HA} = \frac{2}{P} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{(1+PT)}, \quad (77)$$

la masa del agujero negro:

$$M_{BH} = \left(\frac{r_0}{2} \right)^{3/2} P^{1/2}, \quad (78)$$

el campo escalar:

$$\phi_{(t)} = \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \ln(1+PT) + \phi_0, \quad (79)$$

los vectores de Killing:

$$\xi^0 = -\frac{2}{3P} \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} (1+PT)^{-2/3}, \quad (80)$$

$$\xi^1 = \frac{2}{3}r, \quad (81)$$

el invariante de Kretchmann, el escalar curvatura:

$$K = \frac{15P^4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 (1+PT)^{-4}, \quad (82)$$

$$R = -\frac{2P^2}{3} (1+PT)^{-2}, \quad (83)$$

que denota la existencia de una singularidad en $T = -\frac{1}{P}$ y por último el diagrama de Penrose de este espacio-tiempo (Figura 3).

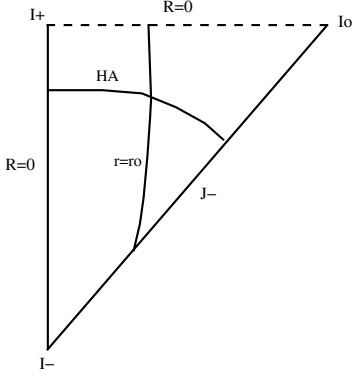


Figura 3. Diagrama de Penrose que muestra el horizonte aparente (HA) y la singularidad (en línea cortada) para el tercer modelo (una vez efectuado el cambio de variable).

4.4. Análisis de los Modelos

En esta sección se presentaron tres modelos aparentemente distintos, que representan el colapso gravitacional de un campo escalar sin masa ϕ . En todos se observó, producto del modelamiento del espacio-tiempo, que la masa del agujero negro resultado del proceso de colapso, toma la ley de potencia $M \propto P^{1/2}$.

Como en el modelo de Choptuik, el análisis de los modelos debe contemplar la aparición de un parámetro (valor crítico) P_* , tal que, comparado con el parámetro P y dependiendo de los valores que tome P_* , se forme o no el agujero negro. Este valor crítico, evidente de la relación de escalamiento de la masa, es cero $P_* = 0$, por lo que existen tres casos de análisis.

- Si $P = 0$ (solución crítica), la masa del agujero negro se hace cero, el campo escalar se hace constante, la métrica decae a la de Minkowski y el Horizonte Aparente tiende a infinito, lo que denota que no existe ningún tipo de colapso.
- Si $P > 0$ (solución supercrítica), todos los parámetros matemáticos y físicos existen y se forma un agujero negro.
- Si $P < 0$ (solución subcrítica), la solución y los parámetros matemáticos y físicos son los inversos que en el caso $P > 0$. Así, estos representan la formación de agujeros blancos.

En el anterior análisis no se hace mención a ninguno de los tres modelos, ya que este es válido para los tres.

Un análisis global de los parámetros físicos obtenidos, muestra que la universalidad de las variables físicas, predicha por Choptuik también se observa en nuestros modelos, ya que como se ve de las ecuaciones (40), (58) y (79), la forma funcional del campo escalar es la misma en los tres, resultado encontrado también en [11] y que, como consecuencia natural de que la métrica decae a la de Minkowski, el campo escalar se hace constante.

Asimismo, la universalidad del exponente crítico γ , predicha para un determinado tipo de materia, se observa en los tres modelos, ya que en todos los casos el exponente crítico toma el valor $\gamma = 1/2$.

Del escalamiento de la masa (ecuaciones (34), (56) y (78)) se observa, que todos los modelos presentan el colapso Tipo II, es decir, la formación de los agujeros negros comienza con una masa infinitesimal y que como resultado de resolver el sistema de ecuaciones (8) todos los modelos verifican la condición de ser auto-similares de la primera clase u homotéticos.

El análisis global es similar en los tres modelos. El invariante de Kretchmann K y el escalar curvatura R para los modelos, muestran la existencia de una singularidad en $t = -\frac{1}{P}$. La naturaleza de esta singularidad depende del valor del parámetro P . Cuando $P > 0$ la singularidad se encuentra detrás del horizonte aparente, y la solución representa la formación del agujero negro. Los diagramas de Penrose correspondientes a estos modelos se muestran en las Figuras 1,2 y 3.

Asimismo, como los tres modelos presentan las mismas generalidades, la métrica aparentemente son diferentes en los tres casos; en particular, la función $f(t)$ en (29), (52) y (69) pueden ser transformados como en el caso de la ec.(73) adecuadamente y se puede mostrar que en realidad las tres soluciones son las mismas.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo, se analizó la dicotomía entre la formación o no de un agujero negro y el escalamiento de la masa correspondiente a la primera posibilidad presentando tres soluciones analíticas no-estáticas de la ecuación de Einstein.

Para observar el escalamiento de la masa, la forma del campo escalar y la forma del espacio-tiempo, se modeló el espacio-tiempo, para lo que previamente se introdujeron los parámetros de análisis tanto físicos como matemáticos, así como las condiciones geométricas y físicas para hacer modelos físicamente realistas. El particular, se introdujo el concepto de horizonte aparente como una generalización del horizonte de eventos y la masa encerrada dentro del mismo; ya que estas masas resultaban infinitas, inviabilizando un análisis global del espacio-tiempo, se discutió la posibilidad de utilizar el método de cortar el espacio a lo largo de una hipersuperficie, formalismo ideado por W. Israel, tal que las masas resultantes del colapso, sean finitas.

Una vez presentados los parámetros y las condiciones

para el modelamiento del espacio-tiempo, se pasó a encontrar las soluciones de la ecuación de Einstein, no sin antes establecer ciertas restricciones sobre la dependencia funcional de los parámetros físicos con respecto a la variable temporal y espacial, esto con el propósito de resolver las ecuaciones diferenciales planteadas de forma directa. Una vez encontradas las soluciones (espacios con horizontes aparentes que evolucionan), se procedió a aplicar todas las condiciones para observar la forma del escalamiento de la masa de los agujeros negros y la forma del campo escalar.

Un hecho interesante, es que en todos los modelos se observan las mismas generalidades. El hecho de que el exponente crítico y la forma funcional del campo escalar sean los mismos, podría ser un indicio de la universalidad del exponente crítico para un dado modelo de materia, y la universalidad del espacio cuando se presenta el colapso crítico sin embargo como puede fácilmente demostrarse en realidad se trata del mismo espacio tiempo.

Cabe recalcar que el valor $\gamma = 1/2$ ya ha sido encontrado en otros estudios [2] [23], sin embargo, el análisis para la obtención de las soluciones es distinto, por lo que representa una confirmación del valor del exponente crítico con este tipo de auto-similaridad.

También debe puntualizarse, que el hecho de que en nuestros modelos el exponente crítico sea distinto a aquel encontrado por Choptuik ($\gamma \sim 0.36$) no representa una contradicción y más bien muestra que γ no depende sólo del tipo de materia, sino también del tipo de auto-similaridad del espacio, ya que en el modelo de Choptuik el espacio presenta DSS y en los nuestros CSS.

Claramente, las conclusiones demandan, una mayor cantidad de trabajo numérico y teórico, para establecer las generalidades en los fenómenos críticos del colapso gravitacional. En particular, los futuros estudios deben incluir modelos más generales, alejados de la simetría esférica con un momento angular y/o carga eléctrica. También quedan por considerar los efectos cuánticos en esta discusión, tarea que recién será emprendida en el contexto del colapso crítico.

El reto teórico fundamental es el de poder explicar porque tantos modelos de materia admiten una solución crítica, es decir, un atractor de codimensión uno en el umbral de la formación de un agujero negro. Si la existencia de una solución crítica es realmente una característica genérica, entonces, al menos, debe existir un argumento intuitivo, y tal vez una prueba matemática para este hecho importante.

REFERENCIAS

- [1] Abrahams, A.M. y Evans, C.R., 1993, Critical Behavior and Scaling in Vacuum Axisymmetric Gravitational Collapse, Phys. Rev. Lett. 70, 2980–2983.
- [2] Brady, P.R., Chambers, C.M., 1997, Phases of Massive Scalar Field Collapse, Phys. Rev. D56, 6057–6061, gr-qc/9709014.
- [3] Carmeli, M., 'Classical Fields', (John Wiley & Sons, Inc., 1982).
- [4] Carr, B.J., y Coley, A.A., 2000, Complete Classification of Spherically Symmetric Self-Similar Perfect Fluid Solutions, Phys. Rev. D62, 044023.
- [5] Choptuik, M.W., 1993, Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field, Phys. Rev. Lett. 70, 9.
- [6] Choptuik, M.W., Chmaj, T., Bizon, P., 1996, Critical Behavior in Gravitational Collapse of a Yang–Mills Field, Phys. Rev. Lett. 77, 424, gr-qc/9603051.
- [7] Evans, C.R. y Coleman, J.S., 1994, *Critical Phenomena and Self-Similarity in the Gravitational Collapse of Radiation Fluid*, Phys. Rev. Lett. 72, 1782.
- [8] Gundlach, C., 2000, Critical Phenomena in Gravitational Collapse, gr-qc/0001046.
- [9] Hirschmann, E.W. y Eardley, D.M., 1995, Universal Scaling and Echoing in Gravitational Collapse of a Complex Scalar Field, Phys. Rev. D51, 4198, gr-qc/9412066.
- [10] Horowitz, G.T., Teukolsky, S.A., 1998, 'Black Holes', gr-qc/9808035.
- [11] Husain, V., Martinez, E.A., Núñez, D., 1994, Exact Solution for Scalar Field Collapse, Phys. Rev. D50, 3783.
- [12] Joshi, P.S., 'Global Aspects in Gravitation and Cosmology' (Oxford University Press Inc., New York, 1993).
- [13] Kaku, M., 'Quantum Field Theory' (Oxford University Press, Inc., New York, 1993).
- [14] Landau, L.D., E.M. Lifshitz, 'Teoría Clásica de los Campos', (Ed. Reverté S.A., Barcelona, 1966).
- [15] Lucano, Marcelo J., Tesis presentada para la obtención del grado de Licenciado en Física, Universidad Mayor de San Andres, La Paz-Bolivia, (2001)
- [16] Luminet, J.P., 'Agujeros Negros' (Editorial Alianza, Madrid, 1991).
- [17] Misner, C.W., K.S. Thorne, J.A. Wheeler, 'Gravitation' (W.H. Freeman & Company, San Francisco, 1973).
- [18] Neilsen, D.W., y Choptuik, M.W., 1999, Critical Phenomena in Perfect Fluids, gr-qc/9812053.
- [19] Poisson, E. y Israel, W., Phys. Rev. D41 1796 (1990)
- [20] Rein, G., Randall, A.D., Schaeffer, J., 1998, Critical Collapse of Collisionless Matter—a numerical investigation, Phys. Rev. D58, 044007, gr-qc/9804040.
- [21] Shapiro, S.T., Teukolsky S.A., 'Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars', (John Wiley & Sons, Inc., 1983)
- [22] Wald, R.M., 1997, Gravitational Collapse and Cosmic Censorship, gr-qc/9710068.
- [23] Wang, A., Oliveira, H.P., 1996, Critical Phenomena of Collapsing Massless Scalar Wave Packets, gr-qc/9608063.
- [24] Wang, A., 2001, Critical Phenomena in Gravitational Collapse: The Studies so Far, gr-qc/0104073.
- [25] Weinberg, S., 'Gravitation and Cosmology' (John Wiley & Sons, Inc., 1972)

LA DESCRIPCIÓN DE UNA NUEVA ENTROPÍA¹

Rex Graham, Constantino Tsallis

RESUMEN

Constantino Tsallis es un físico brasileño nacido en Atenas, Grecia, en 1943. Es investigador del *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas* (CBPF) en las áreas de física de la materia condensada, física estadística y física de los sistemas complejos, dentro de las que se dedica a temas tales como: transiciones de fase, fenómenos críticos, caos, autómatas celulares, redes neuronales, sistemas auto-organizados, mecánica estadística, termodinámica estadística generalizada, etc. El Dr. Tsallis es un científico de amplia y reconocida trayectoria internacional: publicó más de 250 artículos en revistas y libros, dictó más de 500 conferencias en 30 países; dirigió 27 tesis de postgrado, regularme ofrece cursos de pre y postgrado en Brasil, Argentina, Francia y EUA; es (o fue) editor consejero de las revistas *Physica A* (Holanda), *Journal of Statistical Physics* (EUA), *Nuovo Cimento* (Italia) y *Uroboros* (México), así como árbitro de las principales revistas brasileñas e internacionales en física estadística y física de la materia condensada. Fue distinguido —entre otros— con los honores de Ciudadano Honorario del Estado de Río de Janeiro y Científico Distinguido de la Diáspora Griega. Es miembro de sociedades físicas de Brasil, Europa, EUA, así como *Fellow* de la Fundación Guggenheim (EUA). Recientemente, el Dr. Tsallis visitó Bolivia con motivo del II Curso Boliviano de Sistemas Complejos, en el marco de la XV Reunión Anual de la Sociedad Boliviana de Física (2002) y ofreció el curso “Mecánica Estadística no extensiva”. A propósito de las principales ideas originales expuestas por el Dr. Tsallis en esa ocasión, tenemos el gusto de ofrecer a nuestros lectores la traducción de un artículo de Rex Graham[1], editor de la revista *Astronomy* (EUA).

La ley de la conservación de la energía es una de las leyes fundamentales de la física y una de las más utilizadas, pues es usual acudir a ella para explicar fenómenos tales como la fusión del hidrógeno o el movimiento orbital de los planetas. Sin embargo, aún se necesita otro concepto fundamental para entender cómo cierta forma de energía puede convertirse en otra, por ejemplo, cuando la combustión de una cantidad de carbón se transforma en la energía mecánica que mueve a un tren. Esta es la esencia de lo que se conoce como “entropía”.

Durante casi 120 años, los físicos acudieron a la célebre fórmula que describe a la entropía, y que es referida usualmente como “entropía de Boltzmann-Gibbs”, la que aparece prácticamente en todos los textos de física moderna. Sin embargo, no es común encontrar en los textos una nueva expresión para la entropía, que ya varios físicos reconocen hoy como un avance significativo en la física teórica. Dicha expresión fue encontrada por el Dr. Constantino Tsallis, profesor del *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas* en Río de Janeiro (Brasil), y recientemente profesor visitante del Instituto de Santa Fe (EUA). Esta nueva fórmula propuesta por el Dr. Tsallis es una generalización del concepto clásico de entropía

y ayuda a explicar una amplia gama de fenómenos que va desde la estructura de los fractales hasta el comportamiento dinámico del ADN y otras macromoléculas.

Comencemos este relato con algunos antecedentes históricos. En 1865, el físico alemán Rudolf Clausius introdujo el concepto de entropía durante el cenit de las máquinas a vapor; dicho concepto especifica cuánta energía disponible se puede obtener a partir del calor para su conversión en trabajo mecánico. Este mismo concepto se relacionó más tarde con el grado de desorden en un sistema, gracias a los trabajos del físico austriaco Ludwig Boltzmann en el área que se denominó “mecánica estadística” (cuyo principal artífice fue J. W. Gibbs, físico-matemático de la Universidad de Yale, EUA); de ello resulta que la entropía se expresa simbólicamente por la venerable ecuación $S = k \log W$, donde la entropía S es el producto de la constante de Boltzmann k y el logaritmo del número W de microestados o “compleciones elementales” del sistema físico en cuestión. En esta rama de la física se describe las características de una sustancia en términos del comportamiento estadístico de los átomos y moléculas que la componen. Por ejemplo, al considerar las moléculas de un gas[2] contenidas en una caja, la mecánica estadística supone que, dado que dichas partículas chocan y rebotan de manera aleatoria, el estado más probable que puede

¹ Este artículo fue traducido y adaptado por Diego Sanjinés y José Nogales, Carrera de Física, U.M.S.A.

ocurrir es aquel cuyo desorden molecular es el mayor. Durante la década del año 1870, Gibbs introdujo otra expresión para describir la entropía, de tal forma que si todos los microestados de un sistema tienen la misma probabilidad, su fórmula se reduce a $S = k \log W$. Esta fórmula, referida usualmente como la “entropía de Boltzmann-Gibbs”, ha sido durante 120 años la principal herramienta de la termodinámica. Y así fue, hasta que Tsallis planteó una nueva fórmula para la entropía y de ella emergió algo revolucionario.

“El concepto de energía es extremadamente rico, pero aún así es más simple que el de entropía” —afirma Tsallis. Y continúa: *“La energía tiene que ver con posibilidades, mientras que la entropía tiene que ver con la probabilidad de que dichas posibilidades ocurran. Así, la entropía toma el concepto de energía y lo lleva epistemológicamente un paso hacia adelante”*. Tsallis sospechaba ya durante años, que la fórmula de Boltzmann y Gibbs para la entropía tenía serias limitaciones. Por ejemplo, no se podía describir la “evolución temporal” de entropía en situaciones críticas donde el sistema físico estaría ubicado en la frontera entre el orden y el caos. Asimismo, la entropía de Boltzmann-Gibbs fallaba al tratar de describir los sistemas críticos auto-organizados, cuyas propiedades evolucionan de una manera muy particular.

Actualmente, varios físicos en todo el mundo aplican la fórmula propuesta por Tsallis a una variedad de áreas, tales como la física del estado sólido y la teoría de la información. Así, esta nueva entropía puede adaptarse a las características físicas particulares de muchos sistemas, y mantener al mismo tiempo su identidad fundamental como parte de la segunda ley de la termodinámica, esto es, la ley de incremento de entropía del universo en todos los procesos. Aunque la nueva definición de entropía propuesta por Tsallis comprende a la expresión de Boltzmann-Gibbs como caso particular (cuando la entropía de un sistema dado es la suma de entropías de los subsistemas), la nueva fórmula es más general, pues describe fenómenos que —aunque por lo general son inusuales— son asimismo muy importantes. Así, Tsallis afirma: *“Varios físicos dirán que esta nueva propuesta es muy extraña, pues se sabe que solamente hay una entropía, pero pienso que detrás de todo existe un concepto nuevo, mucho más amplio y general que el concepto clásico”*.

Constantino Tsallis nació en Atenas (Grecia) en 1943. Su padre, un lingüista natural y comerciante textil, abandonó Grecia en 1947 con su familia huyendo de la guerra civil. Así, los Tsallis se establecieron en Argentina, donde pronto el joven Constantino asimiló la cultura de raíces españolas, sin abandonar —empero— su inclinación por la compenetración científica de los filósofos clásicos griegos. Después de todo, fueron los griegos quienes concibieron la idea de “átomo” a partir de razonamientos puramente filosóficos, más que de la

evidencia natural. Tsallis sostiene vehementemente que la verdad y la belleza son equivalentes, idea cuyo origen se encuentra hace 2500 años, en la tierra donde se gestó conceptos tales como teoría, democracia y literatura clásica.

Aunque los átomos y moléculas no fueron realmente descubiertos sino hacia fines del siglo XIX, Boltzmann pensó que ya había suficiente evidencia de su existencia, lo que lo llevó a obtener su fórmula para la entropía elaborada sobre la base de probabilidades de algo que él llamó “complejiones elementales” del sistema físico. Lamentablemente, debido en parte a su carácter maniaco-depresivo, y al rechazo de sus colegas que no aceptaron la teoría atómica ni su expresión para la entropía, Boltzmann se suicidó en 1906.

En 1994, Tsallis decidió visitar la tumba de Boltzmann en el cementerio central de la ciudad de Viena (Austria); allí contempló el trágico epitafio grabado en el granito de su lápida: $S = k \log W$. Aunque varios de los científicos más célebres del mundo realizan la peregrinación para visitar esta tumba, fue Tsallis quien, siendo aún un joven científico, se percató de una cierta “debilidad” de aquella fórmula. Durante las tres últimas décadas, las publicaciones de Tsallis cubrieron temas que van desde la genética hasta la astronomía. En particular, Tsallis se interesó por los fractales, aquellas construcciones geométricas autosimilares e independientes de la escala, que permiten una descripción más real de estructuras tales como nubes, montañas, perfiles costeros, etc. Asimismo, el comportamiento fractal se puede encontrar en sistemas auto-organizados tales como terremotos y bandadas de aves, por ejemplo. Tsallis se interesó por esta ubicuidad del comportamiento fractal en la naturaleza, así como por las razones debido a las que la entropía clásica de Boltzmann-Gibbs *no* se aplica a dichas estructuras.

Hacia 1985, durante el receso para café en un congreso internacional en la ciudad de México, Tsallis tuvo la repentina inspiración para generalizar la entropía de Boltzmann-Gibbs; luego le tomó tres años decidirse a publicar sus ideas. *“La entropía es un tópico muy sutil y controversial”* —asegura Tsallis. Y prosigue: *“Estuve ocupado tratando de penetrar en el significado físico y validez de mi generalización”*. Después de aquel profético receso para café, Tsallis comenzó a utilizar analogías matemáticas sustraídas de los fractales, a fin de concebir su novedosa fórmula. Algunos físicos reconocen aquí una idea brillante que generaliza la entropía de Boltzmann-Gibbs. Otras expresiones y nuevas alternativas para describir la entropía se habían propuesto ya durante años, principalmente por parte de ingenieros y expertos en cibernética, sin embargo, ninguna de ellas era consistente con el esquema original propuesto por Gibbs, ya que en ningún caso se buscó lograr algún objetivo físico en particular. Por el contrario, la propuesta de Tsallis aspira a generalizar la termodinámica y la mecánica estadística.

Así, la nueva entropía cumple casi todos los requisitos del esquema de Gibbs, salvo la condición de aditividad o extensividad. En la termodinámica ordinaria, la energía y entropía son cantidades extensivas, lo que significa que la energía o entropía total de dos sistemas independientes será igual a la suma de las entropías parciales de dichos sistemas. La entropía de Tsallis (anunciada por primera vez en 1988 en el *Journal of Statistical Physics*) es no-extensiva. Esto constituyó un duro golpe para las convenciones tradicionales en la física.

Un siguiente artículo aparecido en 1991 en el *Journal of Physics* y titulado “Mecánica Estadística Generalizada: Conexiones con la Termodinámica” (C. Tsallis y E.M.F. Curado), ayudó a propagar la revolución iniciada por Tsallis, quien afirma: “*La entropía que aprendimos en nuestra formación académica tradicional, está bien cuando se aplica a una cantidad grande de moléculas como las que hay en una habitación, y a muchas otras cosas, pero también hay una diversidad de procesos en los que se necesita ‘otra’ entropía. Muchos físicos dirán que esto no tiene absolutamente ningún sentido, pero una cantidad creciente de otros físicos dirán que este asunto no carece de sentido*”. El Instituto de Información en Ciencia anunció que el artículo de Tsallis y Curado de 1991 fue el artículo brasileño más citado durante la década de los 90. Tres congresos internacionales entre 1999 y 2000 (dos en Japón y otro en EUA) se dedicaron exclusivamente a explorar las ramificaciones de las ideas de Tsallis. En el año 2001 se programó una conferencia en Italia para explorar posibles aplicaciones de la entropía de Tsallis, y otra conferencia próxima en el Instituto de Santa Fe (co-dirigida por Murray Gell-Mann) se dedicará a las aplicaciones en otras áreas diferentes a la física.

Explicando sus ideas a un reportero en Julio de 2000 en el célebre MIT, Tsallis lentamente escribe ecuaciones en una hoja, mientras soportan el calor húmedo del verano en Cambridge (EUA). Tsallis comienza con conceptos de probabilidad, deriva luego la fórmula de la entropía de Boltzmann-Gibbs y a continuación dibuja una raya horizontal debajo de la que escribe un cierto exponente q . Luego combina q con la fórmula de la entropía de tal forma que la probabilidad p aparece elevada a la potencia q . Y repentinamente, de este cálculo simple, surge el poder del razonamiento de Tsallis. “*Si $q = 1$, se obtiene la conocida entropía de Boltzmann-Gibbs. Pero en el eventual caso de tener una probabilidad muy pequeña elevada a la potencia q , siendo ésta menor que 1, entonces se obtiene un número mayor que dicha probabilidad*”—afirma Tsallis. Una forma de ilustrar lo que Tsallis quiere decir, por ejemplo, es que si $p = 0.5$ y $q = 0.3$, entonces p elevado a la q da como resultado 0.8.

Tsallis utiliza el ejemplo de un tornado para demostrar cómo un evento de baja probabilidad puede llegar a ocurrir. Él afirma que normalmente, las moléculas de gas en el aire que reposa sobre una ciudad se mueven

de manera aleatoria e independiente. En tal caso, las entropías de dos volúmenes diferentes de aire se pueden sumar, esto es, se tiene un sistema extensivo. Sin embargo, la naturaleza no siempre es extensiva, como es el caso de un tornado, donde el movimiento de las moléculas está altamente correlacionado. Luego, ¿por qué un tornado es un evento poco frecuente? Tsallis responde que ello se debe a que trillones de moléculas comienzan a girar ordenadamente formando un torbellino, lo que sin duda es un evento de baja probabilidad, pero una vez que comienza a ocurrir, lo controla todo. De la misma forma, la visión humana también puede comportarse de manera no-extensiva. “*Por ejemplo —dice Tsallis—, si una gran pared blanca tiene una mancha roja, el ojo humano la detecta inmediatamente, ya que no se supone que deba estar allí. Así, la percepción visual está controlada por eventos poco probables*”.

Seth Lloyd, un académico del Instituto de Santa Fe, nos explica que para la mayor parte de los sistemas físicos comunes, la suposición de la extensividad es razonablemente buena. Lo que Tsallis hizo, fue definir de una manera muy simple una generalización de la entropía de Boltzmann que no es aditiva, donde el parámetro q mide el grado de dicha inextensividad. Esta forma de generalización es la más simple que se puede imaginar. Para una variedad de sistemas con interacciones de largo alcance (estado sólido, dinámica caótica, sistemas químicos, etc.), la entropía de Tsallis se maximiza para cierto valor del parámetro q . Esto es matemáticamente muy conveniente.

En las situaciones no-extensivas, las correlaciones entre los constituyentes individuales de un sistema, no decaen exponencialmente con la distancia, como ocurre en las situaciones extensivas, sino de acuerdo a una cierta potencia de la distancia que se puede ya sea calcular empíricamente o deducir teóricamente. Esto es lo que se denomina “ley de potencias”. Si se grafica el logaritmo del número de veces que se encuentra el valor de una cierta propiedad contra el logaritmo del valor mismo, y se obtiene una línea recta, entonces la relación en cuestión obedece una ley de potencias. Por ejemplo, la escala de Richter para la intensidad de los terremotos es una ley de potencias: la gráfica del logaritmo de la intensidad de los terremotos versus el logaritmo del número de terremotos conduce a una recta. La entropía de Tsallis se aplica a cientos de sistemas no-extensivos que obedecen este tipo de ley de potencias, y resulta muy útil, por ejemplo, para describir el comportamiento fractal.

Desafortunadamente, Tsallis aún no tiene una demostración (a partir de primeros principios) de que su fórmula para la entropía no-extensiva es la mejor posible. Michel Baranger, profesor emérito del MIT, afirma que la falta de dicha demostración ha despertado el escepticismo de varios físicos. “*Hasta donde sé —declara Baranger— la fórmula de Tsallis es excelente, pero me gustaría ver una justificación de dicha expresión a partir*

de primeros principios. Probablemente la veamos pronto, pues todo indica que la fórmula es buena”.

Otro académico, A.K. Rajagopal, experto en física de la materia condensada y en teoría cuántica de la información, opina que lo que hizo Tsallis de manera intuitiva, es realmente notable, pues lo lleva a uno de las probabilidades exponenciales ordinarias, a las probabilidades que obedecen la ley de potencias. Esto es muy importante pues muchos sistemas físicos se explican gracias estas últimas probabilidades, por ejemplo: comportamiento fractal, dinámica del ADN y otras macromoléculas, difusión anómala en materiales, etc. *“Hay una fórmula para cada clase de fenómeno, pero podría ser que haya aspectos en común para todos estos fenómenos”* —concluye Rajagopal.

Hoy día, varios científicos se refieren al parámetro q en la entropía de Tsallis como el “índice entrópico” o el “índice de inextensividad”. Tsallis afirma que su expresión para la entropía no-extensiva aparece como una manera simple y eficiente de caracterizar aquello que se conoce comúnmente como *complejidad*, o al menos, ciertos tipos de complejidad. No todo teórico de la complejidad irá tan lejos como para aceptar esta novedad, pero la mayoría de ellos tiene una buena disposición para explorar nuevas posibilidades, aunque sean poco probables.

REFERENCIAS

- [1] <http://www.santafe.edu/sfi/publications/Bulletins/bulletinFall00/features/tsallis.html>.
- [2] “air molecules” en el original.

EL REFRIGERADOR DE EINSTEIN Y SZILARD

Diego Sanjinés C.¹, José Nogales V.²

*Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
Casilla 8635, La Paz–Bolivia*

RESUMEN

Uno de los tópicos casi desconocidos de la vida de Albert Einstein, aunque muy importante para él, fue su participación en el diseño de inventos prácticos tales como: un dispositivo auxiliar para mejorar la audición, un método para amplificar voltajes geomagnéticos, aplicaciones de membranas coloidales, etc. Pero uno de los inventos al que más tiempo y esfuerzo consagró fue un tipo novedoso de refrigerador, que diseñara junto al físico Leo Szilard. Los pormenores de esta historia tan interesante se publicaron en varios artículos, pero destaca el de Gene Dannen titulado “*The Einstein-Szilard Refrigerators*” (*Scientific American*, Enero de 1997), pues ofrece una serie de detalles técnicos así como aspectos anecdóticos que sin duda enriquecen la imagen popular que se tiene del célebre Einstein. A fin de ofrecer a nuestros lectores esta interesante lectura, hemos traducido y adaptado el artículo de Gene Dannen, tomando sus partes más relevantes así como agregando complementos de otras fuentes.

Albert Einstein, desde muy joven hasta sus 40 años, trató de mantener un contacto cercano con experimentos y el diseño de aparatos prácticos, aunque usualmente la imagen más conocida que se tiene del trabajo de Einstein es la teoría abstracta, a veces socorrida por el llamado *Gedanken*, o “experimento pensado”. Cuando era estudiante de colegio, el joven Einstein pensó cómo se podría medir el arrastre de éter debido al movimiento de la Tierra; escribió un reporte de su propuesta que luego él mismo calificó de ingenuo e incompleto, “como era de esperarse de un joven”. Sin embargo, sus inquietudes ya reflejaban una madurez de pensamiento, pues le intrigaba cómo —suponiendo al éter como un medio elástico— las componentes de esta elasticidad afectarían la velocidad de propagación de una onda. Hacia el año 1898, estando en su segundo año de universidad, aún insistía en contruir un aparato para medir el arrastre de éter, sin enterarse de que ya, en los EUA, el físico A. Michelson había construido tal aparato sin detectar dicho arrastre. Quizá fue mejor para Einstein no haber llegado jamás a construir él mismo ese aparato.

Uno de los primeros y el más conocido de los “experimentos pensados” de Einstein fue: “*Si uno corre con la velocidad de la luz al lado de una onda luminosa, ¿debería acaso hallar una onda estacionaria? ¿No parece que una cosa así pueda existir!*” Tuvo que pasar un periodo de 10 años para que él mismo respondiera esta paradoja, y ello fue el germen de un principio de la Teoría Especial de la Relatividad. Posteriormente, cuando ya trabajaba en la Oficina de Patentes de Berna (Suiza), se entretenía

tratando de construir un dispositivo para medir voltajes muy pequeños, mientras dedicaba todo su tiempo (¿libre?) a redactar sus famosos artículos de 1905. Einstein relacionaba uno de éstos, aquel referido al movimiento browniano (y el más citado de todos), con sus intentos para medir voltajes, pues —según él— las fluctuaciones del voltaje en un condensador se comportaban de manera muy similar al movimiento browniano. El aparato para amplificar pequeños voltajes finalmente fue construido por los hermanos Habicht en 1910.

Pero el aspecto más interesante de esta inusual faceta de Einstein como inventor práctico, salió a la luz gracias al exhaustivo trabajo de investigación histórica de Gene Dannen, un académico entusiasta del rol que jugó Leo Szilard en el nacimiento de la era nuclear. En 1939 Szilard visitó a Albert Einstein —quien ya estaba establecido en los EUA— a fin de discutir los riesgos de una eventual bomba atómica. Szilard estaba angustiado por los descubrimientos recientes sobre la fisión del uranio, ya que él mismo había previsto cómo una reacción en cadena podría multiplicar peligrosamente dicho proceso hacia una explosión de magnitud jamás vista. La angustia de que este descubrimiento pudiera ser utilizado por los nazis, llevó a Szilard a convencer al ya presitigioso e influyente Albert Einstein de escribir aquella famosa carta para prevenir al presidente de los EUA, Franklin D. Roosevelt, de los riesgos inherentes a semejante bomba y en consecuencia urgirlo a tomar “medidas inmediatas”. Cuando Szilard visitó a Einstein en aquella ocasión, también rememoraba los tiempos en los que —siendo un joven y emprendedor científico— colaboró con Einstein en el diseño de... refrigeradores caseros. Buscando más información sobre esta “inusual” actividad de Einstein,

¹ Email: sanjinés@fiums.a.edu.bo

² Email: jnogales@fiums.a.edu.bo

Dannen llegó a Estocolmo (Suecia) y averiguó que la compañía AB Electrolux aún conservaba los expedientes de las patentes adquiridas de los socios Einstein-Szilard. De estas y otras fuentes, Dannen revivió un aspecto casi desconocido del genio teórico de Einstein, revelando que sus diseños de refrigeradores fueron más complejos e ingeniosos de lo que se podría suponer, dado que Einstein —ciertamente— ganó su celebridad en el campo de la física teórica.

En 1920, Einstein, que tenía entonces 41 años, era ya el físico más famoso a nivel mundial (ganaría el Premio Nóbel en año siguiente), mientras Leo Szilard, un joven húngaro de 22 años, era estudiante de doctorado en física en la Universidad de Berlín. Cierta día habría visitado a Einstein a fin de obtener consejos para su tesis doctoral, y de allí, gracias a la buena impresión que causarían en Einstein las ideas de Szilard, comenzaría una amistad de por vida. Mientras Einstein era modesto y retraído, Szilard era lo opuesto: extrovertido y arrogante. No obstante, hacia mediados de la década de 1920, Szilard visitaba con frecuencia el hogar de Einstein, donde compartían un gusto común por los inventos prácticos. Recordemos que después de graduarse en el Instituto Politécnico de Zurich, Einstein comenzó a trabajar en la Oficina de Patentes de Berna, donde era perito en la revisión de las muchas solicitudes de inventos que llegaban allí de todas partes.

De acuerdo a versiones confiables (Bernard Feld, Departamento de Física, MIT, EUA), Einstein comenzó su interés por el diseño de refrigeradores después de leer en el periódico una noticia trágica: una familia entera había perecido envenenada (mientras dormía) por la fuga de los gases tóxicos de su refrigerador. En aquella época, el uso de refrigeradores domésticos se extendía considerablemente, pero aún los gases utilizados eran muy tóxicos: cloruro de metilo, amoníaco y dióxido de azufre. Einstein y Szilard pensaron que podría haber una forma de impedir tales fugas, pues éstas ocurrían en las juntas y empaques de sus partes móviles. Luego, si fuera posible fabricar un refrigerador sin partes móviles, ya no habría fugas. Así, Einstein y Szilard comenzaron —gracias a sus conocimientos de termodinámica— el diseño de lo que resultó un invento muy ingenioso, que produciría frío sin necesidad de movimiento mecánico. Por otra parte, también es cierto que Szilard, recién graduado, necesitaba urgentemente estabilidad y seguridad económica, y ello no era posible sólo con los magros ingresos que le dejaba la docencia universitaria. Se dio así un acuerdo de “negocios” entre Einstein y Szilard: si hubiera alguna ganancia por el invento, Szilard sería el primero en reclamarla si su ingreso como docente fuera menor que el salario usual de un profesor asistente universitario, de lo contrario, Einstein y Szilard compartirían las ganancias por igual.

Después de varios diseños y pruebas, se obtuvo finalmente un invento que resultó ser exitoso y revolucionario:



Figura 1. Leo Szilard (1898-1964), originario de Budapest-Hungría y naturalizado estadounidense, fue un físico cuya fama se debe principalmente a su rol en el diseño de la bomba atómica, aunque también cuenta con contribuciones importantes en los campos de la termodinámica y la biofísica. Siendo joven se interesó ya por los inventos prácticos, de donde surgió la colaboración con Einstein en torno al diseño de refrigeradores; posteriormente habría de inventar métodos para la separación de isótopos, así como para lograr una reacción nuclear en cadena. Huyó de Alemania cuando Hitler llegó al poder en 1933, pasando por Viena y Londres; a partir de 1937 se estableció en los EUA, primero en la Universidad de Columbia y luego en la Universidad de Chicago, donde colaboró con Enrico Fermi en el desarrollo del primer reactor nuclear. En 1946 asumió la cátedra de biofísica en la misma universidad. Después de la explosión de las primeras bombas atómicas en Japón, Szilard encabezó movimientos para el uso pacífico de la energía nuclear, por lo que en 1959 recibió el premio “Átomos por la Paz”.

La bomba electromagnética de Einstein-Szilard. Este dispositivo estaba sellado herméticamente por fuera y no tenía partes mecánicas móviles en su exterior. Por inducción, un campo electromagnético externo desplazaba una masa líquida de metal alojada en el interior de la bomba; el metal, a su vez, se usaba como un pistón que comprimía y expandía el gas refrigerante. El resto del funcionamiento era el mismo que el de los refrigerado-

res comunes, es decir, durante la expansión del gas, éste absorbía calor del sitio que se deseaba enfriar y cuando se comprimía, el gas liberaba ese calor hacia el exterior. Como un desarrollo colateral de este invento, Einstein y Szilard desarrollaron un motorcito electromagnético para producir movimiento oscilatorio lineal en lugar de rotacional, lo que viene muy bien hoy para aplicaciones en un prometedor prototipo de motor de Stirling sin pistones. Esta contribución del espíritu inventivo práctico de Einstein y Szilard ha servido como estímulo para el desarrollo de motores lineales, que constituyen hoy la base para la propulsión de los trenes de levitación magnética.

Aunque la eficiencia calculada del refrigerador de Einstein-Szilard sería menor que la de los modelos comerciales, se ganaría la confianza del público al evitarse la fuga de los temidos gases tóxicos. Así, en 1928, la compañía "General Electric" alemana (cuyas siglas eran AEG) aceptó la propuesta de Szilard de fabricar prototipos del invento y adquirió para ello los derechos exclusivos de la patente. Szilard recibiría un sueldo por dirigir a un grupo de ingenieros eléctricos y mecánicos en torno al desarrollo del invento. Einstein, por su parte, se mantenía más bien alejado de esta fase de fabricación, pero visitaba de vez en cuando al grupo de ingenieros de la AEG para verificar los prototipos. Lo que más ocupaba a Einstein por entonces era su búsqueda infatigable de una Teoría de Campo Unificada, pero se daba un pequeño tiempo para diseñar otros inventos prácticos, como ser, un tipo rotatorio de brújula, un dispositivo auxiliar para mejorar la audición (patentado junto con R. Goldschmidt) y que fuera motivado por el caso de una cantante que estaba perdiendo la audición, y una cámara fotográfica auto ajustable —gracias a una aplicación del efecto fotoeléctrico— para diferentes intensidades luminosas (patentada junto con G. Bucky). A propósito de su interés por estos inventos prácticos Einstein escribió el pequeño poema: *"Algo de técnica aquí y allá, divierte a quien abstraído está. Yo pienso —audaz— que en tal terreno, juntos haremos algo bueno."*

Szilard también se dedicaba a sus tareas académicas en la Universidad de Berlín: dirigía seminarios sobre la nueva teoría cuántica y física teórica junto a los célebres John von Neumann y Erwin Schrödinger. Pero mientras el proyecto del refrigerador avanzaba, negros nubarrones se aglomeraban sobre Europa, pues el —aún pequeño— régimen nazi ganaba en 1930 el 20 % de los votos en las elecciones del Reichstag alemán. Szilard, con un agudo sentido para presentir el futuro tormentoso en Europa, escribía a Einstein esta profética advertencia: *"Cada semana que pasa, detecto síntomas, si mi olfato no me engaña, de que no debemos confiar en un futuro político pacífico por los próximos 10 años. De hecho, no se si será posible fabricar nuestro refrigerador en Europa."* Szilard no se equivocó; el resto es historia.

Hasta donde se sabe hoy, el único inconveniente técnico de refrigerador de Einstein-Szilard es que era muy rui-

dos, ya que el metal líquido que era presionado dentro de la bomba, daba lugar al fenómeno de cavitación, es decir, la expansión y colapso de pequeñas burbujas. Uno de los amigos de Szilard afirmó que el refrigerador "aullaba como un chacal". Con algunos ajustes adecuados, pronto se logró reducir el nivel de ruido a valores más aceptables. En 1931, ya se contaba en los laboratorios de la AEG con un prototipo de refrigerador de Einstein-Szilard que funcionaba permanentemente para efectos de comparación de eficiencia con refrigeradores convencionales. Este prototipo, el G40, contenía como metal líquido, una aleación de sodio-potasio sellada herméticamente; la bomba del refrigerador operaba con una potencia de 136 watts y consumía un promedio de 2.3 kilowatts-hora de energía. Justo entonces, la Gran Depresión que se inició en 1929 y asoló los EUA extendiéndose luego por Europa, afectó el mercado potencial para el refrigerador de Einstein-Szilard; ya en 1930 se conocía en los EUA otro modelo más económico de refrigerador que funcionaba con "Freón", un nuevo gas que no era tóxico. Mucho después se descubrió el efecto destructivo que tendrían los cloro-fluoro-carbonos, componentes del gas Freón, sobre la capa de ozono. Cuando los efectos de la Depresión alcanzaron a los laboratorios de la AEG,

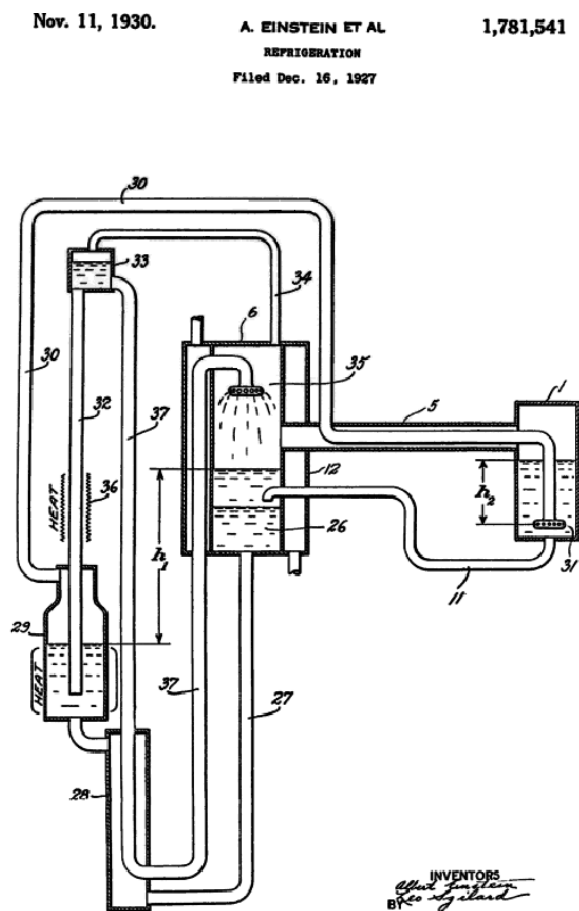


Figura 2. Esquema de uno de los modelos de refrigerador de Einstein-Szilard, de acuerdo a los registros de 1930 de la compañía AB Electrolux. En la esquina inferior derecha se nota los nombres de los inventores.



Figura 3. Leo Szilard en ocasión de una visita al hogar de Einstein.

se redujo a la mitad su personal técnico, y con ello se eliminó todos aquellos proyectos que no fueran estrictamente prioritarios. En 1932, el ingeniero de la AEG, Albert Korodi, escribió un reporte de 104 páginas sobre el refrigerador de Einstein-Szilard, y tuvo la afortunada precaución de hacer una copia que guardó él mismo, pues fue esta copia la única fuente de información que sobrevivió hasta hoy, ya que todos los archivos de la AEG fueron destruidos durante la II Guerra Mundial. En 1933, Hitler fue nombrado canciller de Alemania, y con ello comenzó el fin de la edad de oro de la física en la Universidad de Berlín. Szilard huyó a Inglaterra y luego a los EUA, mientras Einstein encontró refugio en el Instituto de Estudios Avanzado de Princeton, también en los EUA.

Durante los 7 años que duró la colaboración de Einstein y Szilard, se obtuvo un total de 17 patentes, todas sobre variaciones del refrigerador. Tal como habían acordado, las ganancias derivadas de estas patentes apoyaron la carrera científica de Szilard en Alemania y le alcanzó para ahorrar un poco y mantenerse por dos años

en Inglaterra. En 1933, el prolífico Leo Szilard concibió otro invento que financió con lo que quedaba de sus ahorros: el proceso de reacción en cadena con neutrones. Como anécdota, mencionemos que (el físico) W. Gerlach encontró un cierto día a Einstein caminando muy deprimido por las calles de Berlín, pues la oficina de patentes le había informado que uno de sus primeros modelos de refrigerador ya era conocido, y no podía ser patentado. Las palabras de Einstein en ese momento fueron mas bien de alivio: “... *si esto me hubiera sucedido con la Teoría de la Relatividad...*”

Hoy día, este aspecto de la colaboración de dos insignes científicos ocupados en el diseño de refrigeradores, parece curioso y hasta anecdótico. Pero fue más que eso y más que un breve interludio en sus prestigiosas carreras científicas, ya que desde esta primera colaboración hasta sus esfuerzos por controlar la amenaza de las armas nucleares, los logros científicos de Einstein y Szilard estuvieron siempre estrechamente vinculados con un dedicado servicio a la humanidad.

XV REUNIÓN NACIONAL DE FÍSICA COCHABAMBA - SEPTIEMBRE DE 2002 RESÚMENES DE LAS PONENCIAS

Sociedad Boliviana de Física

La Paz-Bolivia

RESUMEN

Se presentan los resúmenes de las exposiciones de la XV Reunión Nacional de Física realizada en Cochabamba entre el 23 y el 27 de Septiembre de 2002.

1. SIMULACIONES COMPUTACIONALES DEL MODELO PENNA CON UN FACTOR DE CONOCIMIENTO

Armando Reynaldo Ticona Bustillos
Universidade Federal Fluminense
Av. Litorânea, s/n — Boa Viagem, Niterói — R.J.
— Brasil, CEP 24210-340, Tel. +55-21 - 2620-6735,
Fax +55-21 - 2620-3881
e-mail: aticona@if.uff.br

Representamos un proceso de aprendizaje usando cadenas de bits, donde bits 1 representan conocimiento adquirido por los individuos. Consideramos dos formas de aprendizaje: Aprendizaje Individual, por prueba y error y Aprendizaje Social, copiando conocimiento de otros individuos o de los padres en el caso de especies que practican cuidado materno. La estructura de edades de las cadenas nos permite estudiar como se acumula el conocimiento durante la vida y su influencia sobre la parte genética de la población después de muchas generaciones. En este trabajo utilizamos el modelo Penna para representar la parte genética de la población. Para poder estudiar la influencia del conocimiento en el proceso de sobrevivencia, usamos éste para ayudar a los individuos evitar las reglas de muerte en el modelo Penna. Las modificaciones en el factor de Verhulst no muestran ninguna característica especial debido a la naturaleza aleatoria de este factor. En cambio, adicionando años de vida en función al conocimiento acumulado, observamos mejoras en las tasas de sobrevivencia, mientras que la parte genética queda menos adaptada. En este último caso, el conocimiento es más importante en los últimos años de vida, cuando los individuos sufren las consecuencias de las enfermedades. También pueden ser observados los efectos de sobreprotección y las diferencias entre el aprendizaje individual y social. Selección sexual en función del conocimiento presenta algunos efectos, cuando fidelidad es impuesta.

2. TEORÍA DEL HANDICAP

Armando Reynaldo Ticona Bustillos
Universidade Federal Fluminense
Av. Litorânea, s/n — Boa Viagem, Niterói — R.J.
— Brasil, CEP 24210-340, Tel. +55-21 - 2620-6735,
Fax +55-21 - 2620-3881
e-mail: aticona@if.uff.br

La teoría del Handicap, es una teoría opcional presentada para explicar algunos comportamientos que no están de acuerdo con la teoría de la evolución de Darwin. Algunas especies, incluyendo el hombre, desarrollaron algunas características que parecen ser perjudiciales en el proceso de sobrevivencia, pero esta desventaja es por lo general una característica preferida por las hembras en el momento de la reproducción. Usando el modelo Penna para representar la parte genética de la población, representamos esta característica extra con una otra cadena de bits, en la cual los bits 1, representan una característica heredada de padre a hijo y de madre a hija. Con la cantidad de bits 1 generamos un nuevo factor de Verhulst, por lo cual esta tercera cadena se auto organiza, presentando una cantidad elevada de bits 1 en ella. Para representar el handicap, imponemos en el momento de la reproducción una forma de escoger la pareja, que está en oposición a la ventaja de sobrevivencia. Podemos ver que la segunda cadena de los machos se auto organiza de manera que la media queda en el límite de lo permitido por la sobrevivencia.

3. AUTOMATIZACIÓN DE UN EXPERIMENTO: DIFRACCIÓN POR UNA RENDIJA

Oscar Cubero
Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
Calle 27, Cota Cota, La Paz, Bolivia
e-mail: ocubero@fiums.edu.bo

Se ha automatizado la toma de datos y el movimiento del sensor correspondiente para obtener cuantitativamente el patrón de difracción producido por una

rendija. Las medidas experimentales se contrastan con las ecuaciones predichas por la teoría.

4. SISTEMAS COLOIDALES

Flavio Ghezzi

Laboratorio de Física de la Atmósfera

Instituto de Investigaciones Físicas

Universidad Mayor de San Andrés

Calle 27, Cota Cota, La Paz, Bolivia

e-mail: fghezzi@o3-bolivia.org

Se explica la formación de diferentes patrones geométricos en dos dimensiones usando partículas micrométricas en la interfase agua-aire. Se discuten diferentes fenómenos físicos asociados, por ejemplo, meta-estabilidad, irreversibilidad e interacciones coloidales.

5. MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL PARA SIMULACIONES EN DINÁMICA CUÁNTICA

Diego Sanjinés

Carrera de Física

Universidad Mayor de San Andrés

Calle 27, Cota Cota, La Paz, Bolivia

e-mail: sanjines@fiums.edu.bo

Estudio teórico y simulaciones sobre transporte electrónico en heteroestructuras.

6. MODELOS ANÁLOGOS EN LA FÍSICA

Adolfo Aramayo García

Carrera de Física

Universidad Mayor de San Andrés

Calle 27, Cota Cota, La Paz, Bolivia

e-mail: aaramayo@fiums.edu.bo

Los modelos análogos son herramientas poderosas que permiten “visualizar” ideas y conceptos de una teoría mediante otra y viceversa. Está, por ejemplo, la analogía que presenta un modelo mecánico a un circuito eléctrico. Por otra parte, también está la analogía que las perturbaciones dinámicas en un medio dado (Mecánica de Fluidos) pueden reflejar para la propagación de ondas y partículas en el espacio-tiempo (Relativa-General). Se presenta en particular un modelo análogo para el modo en que un agujero negro afecta su medio ambiente.

7. SUPERSIMETRÍA

Marcelo Gonzáles Saique

Carrera de Física

Universidad Mayor de San Andrés

Calle 27, Cota Cota, La Paz, Bolivia

e-mail: fisica@fiums.edu.bo

La supersimetría es una teoría que trata de bosones y fermiones de igual manera, vale decir, es una simetría entre estados de diferente espín hasta que

se infringe la supersimetría (ruptura de simetría), esto es, cuando la energía del vacío se hace diferente de cero. La supersimetría es una teoría que trata de unificar las teorías (fuerzas) que describen parcialmente el Universo. Para ejemplificar esta búsqueda se presenta un caso particular, específicamente, la extensión del Modelo Estándar.

8. CÁLCULO NUMÉRICO DE PROPIEDADES DEL ESTADO FUNDAMENTAL DE SISTEMAS METÁLICOS

Raúl W. Tórrez Peláez

Depto. de Física

Universidad Mayor de San Simón

Cochabamba, Bolivia

El objetivo de este trabajo es calcular propiedades del estado fundamental de los metales. La realización de este propósito se efectúa de acuerdo a la Teoría de Funcionales de Densidad (DFT, Density Functional Theory), empleando pseudopotenciales no locales “normconserving” para aproximar el potencial que producen los iones de la red cristalina; y para la descripción de los efectos cuánticos de la interacción electrón-electrón, es decir, los efectos de intercambio y correlación se usa la Aproximación de Densidad Local (LDA, Local Density Approximation). Los cálculos numéricos que se realizan son la energía total por malla, la densidad de carga de valencia a través de un plano cristalográfico y la estructura de bandas de energía de los siguientes sistemas metálicos: Litio, Sodio, Potasio, Rubidio, Cesio (metales monovalentes), Bario, Aluminio y Plomo (metales polivalentes). Los metales monovalentes se eligen por ser los más simples de todos los metales, los cuales cristalizan bajo una red de Bravais cúbica a cuerpo centrado (bbc, body cubic centered). El Bario, Aluminio y Plomo son bivalente, trivalente y tetravalente respectivamente, los cuales se escogen por ser característicos y relativamente simples dentro de esta categoría. El Bario forma una estructura cristalina de una red de Bravais cúbica a cuerpo centrado, en tanto que el Aluminio y el Plomo cristalizan formando una red de Bravais a caras centradas (fcc, face centered cubic).

9. OBTENCIÓN DE ALTO VACÍO

Rodolfo César Tapia Coca

Carrera de Física

Universidad Mayor de San Andrés

La Paz, Bolivia

Se describe la técnica para alcanzar alto vacío explicando el principio de funcionamiento de una bomba rotatoria y de una bomba difusora, así como los instrumentos de medición de vacío Pirani y de ionización. Reportamos un vacío de 10^{-5} Torr obtenido en el laboratorio de la Carrera de Física (UMSA).

CONSIDERACIÓN DEL PESO ESTADÍSTICO EN LA GENERACIÓN DE INCERTIDUMBRES DE FUNCIONES REDUCIBLES A PRIMER GRADO AJUSTADAS POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Wilton Pereira da Silva¹, Cleide M. D. P. S. e Silva¹,
Diogo D. P. S. e Silva¹ y Cleiton D. P. S. e Silva²

¹*Departamento de Física, Centro de Ciências e Tecnologia,
Universidade Federal de Campina Grande, 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil*
²*Mestrado Eng. Eletrônica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S J Campos, SP, Brasil*

RESUMEN

La técnica de linealización de las funciones de potencia y exponencial es común en la regresión lineal. Sin embargo, los resultados obtenidos con esa técnica difieren de forma significativa del ajuste no lineal de esas funciones a un conjunto de datos $(X_i; Y_i)$. En este artículo, se discute la consideración de pesos estadísticos para los datos linealizados de esas funciones y tal consideración es extendida a la determinación de la incertidumbre de la función ajustada. Esa técnica de linealización con la inclusión de pesos estadísticos, es aplicada a dos conjuntos de datos y los resultados, tanto para la función ajustada como para su incertidumbre, están en excelente concordancia con la técnica de regresión no lineal.

ABSTRACT

The linearization technique of exponential and power functions is common in linear regression, but the results obtained by this technique differ significantly from those obtained by a non-linear fit of data of the type $(X_i; Y_i)$. In this article, a consideration of the statistical weights of the linearized data is discussed, and that consideration is extended to the determination of the uncertainty of the fitted function. This linearization technique, including statistical weights, is applied to two sets of experimental data and the results, for the fitted function and for its uncertainty, are in excellent agreement with the non-linear fitting technique.

1. INTRODUCCIÓN

En muchos textos sobre ajuste de curvas (ver [1], [2] y [3], por ejemplo) es común un abordaje inicial sobre la linealización de las funciones de potencia y exponencial con el uso de logaritmos al ser ajustadas a datos experimentales del tipo $(X_i; Y_i)$. La expresión “datos del tipo $(X_i; Y_i)$ ” se debe entender aquí como datos para los cuales sólo están disponibles los valores medios de las coordenadas pero no sus incertidumbres. En general, los resultados obtenidos con la linealización de esas funciones difieren de forma significativa de los resultados obtenidos de sus ajustes con el uso de técnicas no lineales cuando no se toman en cuenta ciertos cuidados. Esto ocurre porque, de la forma como se sugiere la linealización en estos textos, y también como se calcula por algunos paquetes computacionales (ver [4], [5], [6] y [7], por ejemplo), los “puntos linealizados” $(\ln X_i; \ln Y_i)$ para una función de potencia y los puntos $(X_i; \ln Y_i)$ para una función exponencial, contribuyen para el ajuste con los mismos pesos estadísticos. Naturalmente, a falta de información y considerando que los errores sistemáticos sean despreciables, es más razonable suponer que los

puntos originales $(X_i; Y_i)$ tengan la misma incertidumbre, aunque ésta sea desconocida, ya que esos puntos deben haber sido medidos en condiciones experimentales similares. Así, los puntos linealizados deben tener sus propios pesos estadísticos y este artículo discute una forma para que esos pesos estadísticos sean determinados. Más aún, una vez obtenido el conjunto de puntos $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$ con $x_i = \ln X_i$ para la función potencia, o $x_i = X_i$ para la función exponencial con $y_i = \ln Y_i$ en ambos casos, siendo $\sigma_{y_{mi}}$ la incertidumbre del valor medio de y_i , podemos determinar los parámetros de la función de ajuste y asociar una incertidumbre a la función ajustada en total concordancia con la técnica no lineal de regresión. A pesar de que esto ya ha sido hecho en la referencia [8], los resultados que obtienen no concuerdan muy bien con la técnica no lineal porque en dicha referencia se atribuye el mismo peso estadístico a todos los puntos linealizados. Con el objetivo de presentar una nueva técnica de linealización en concordancia con la técnica no lineal de ajuste, haremos un breve estudio del problema de la regresión de una función de primer grado a puntos de tipo $(x_i; y_i)$ y también a puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$. Hay que resaltar, una vez

²Email: wiltonps@uol.com.br

más, que la determinación de los parámetros de las funciones potencia y exponencial, así como la determinación de la incertidumbre para esas funciones ha sido hecha en la referencia [8], pero en aquellas determinaciones se asocia una incertidumbre común a todos los puntos experimentales linealizados, y aquí nosotros corregiremos esta distorsión.

Es bueno observar que en las discusiones anteriores, implícitamente admitimos que los X_i originales están exentos de error, lo que nos permite hablar de linealización sin asociarles una incertidumbre, como hacemos con los Y_i . Mientras tanto, los resultados que obtendremos son válidos aun cuando hubiesen incertidumbres en X_i sólo que, en este caso, habría que transferir las incertidumbres de X a Y .

2. AJUSTE DE UNA RECTA A PUNTOS EXPERIMENTALES

Inicialmente vamos a presentar las soluciones para el ajuste de una recta a puntos del tipo $(x_i; y_i)$ y después a puntos de la forma $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$. Antes, conviene destacar que, a lo largo del artículo, admitiremos las siguientes hipótesis: 1) los errores sistematicos involucrados en las medidas pueden considerarse despreciables; 2) los cálculos de los errores propagados pueden hacerse usando aproximaciones de primer orden; 3) las fluctuaciones estadísticas de los puntos en torno de la función ajustada pueden ser consideradas gaussianas; 4) las medidas originales de Y_i tienen la misma incertidumbre, aunque desconocida, en tanto que los X_i no tienen error.

2.1. Ajuste de una recta a puntos con incertidumbre desconocida.

Para puntos del tipo $(x_i; y_i)$, el método de los mínimos cuadrados de ajuste a una función lineal $y(x) = ax + b$ da las siguientes expresiones para los parámetros a y b [1], [2], [8]:

$$a = \frac{1}{D} [N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N y_i \sum_{j=1}^N x_j] \quad (1)$$

y

$$b = \frac{1}{D} [\sum_{i=1}^N y_i \sum_{j=1}^N x_j^2 - \sum_{i=1}^N x_i y_i \sum_{j=1}^N x_j], \quad (2)$$

donde

$$D = N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2. \quad (3)$$

Para las incertidumbres de los parámetros ajustados así como para la covarianza entre ellos, se puede escribir [2], [8]:

$$\sigma_{am} = \sigma_{y(x)} \sqrt{\frac{N}{D}}, \quad (4)$$

$$\sigma_{bm} = \sigma_{y(x)} \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad (5)$$

$$\text{cov}(a, b) = -\frac{\sigma_{y(x)}^2}{D} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (6)$$

donde $\sigma_{y(x)}^2$ es la varianza del ajuste de la recta a los puntos y está dada por

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2. \quad (7)$$

Aquí es bueno enfatizar, una vez más, que admitimos, como implícitamente se acepta en la referencia [8], las hipótesis señaladas al inicio de §2.

El anterior conjunto de ecuaciones se utilizó en la referencia [8] para ajustar funciones exponenciales a datos experimentales, pero los resultados obtenidos con la linealización de esas funciones no concuerdan muy bien con la técnica de ajuste no lineal. El mérito en dicha referencia fue establecer una incertidumbre para las funciones ajustadas por propagación de errores de acuerdo a las siguientes expresiones:

i. para $Y(X) = ae^{bX}$, la incertidumbre de la función ajustada, determinada por propagación de errores en a y b , es

$$V^2 = (Xe^{bX+C} \sigma_b)^2 + (e^{bX+C} \sigma_C)^2, \quad (8)$$

$$\sigma_{Y(X)m} = \sqrt{V^2 + 2Xe^{2(bX+C)} \text{cov}(b, C)}$$

donde $C = \ln(a)$;

ii. para $Y(X) = aX^b$, la incertidumbre de la función ajustada, determinada por propagación de errores en a y b , está dada por

$$V^2 = (\ln(X)e^{b\ln(X)+C} \sigma_b)^2 + (e^{b\ln(X)+C} \sigma_C)^2, \quad (9)$$

$$\sigma_{Y(X)m} = \sqrt{V^2 + 2\ln(X)e^{2(b\ln(X)+C)} \text{cov}(b, C)}$$

donde, nuevamente, $C = \ln(a)$.

Dada la función exponencial $Y(X) = ae^{bX}$, por linealización se obtiene $\ln(Y(X)) = bX + \ln(a)$. Entonces, la función original puede ser reescrita en la forma $Y(X) = e^{bX + \ln(a)}$. Así, la Ec. (8) puede obtenerse por propagación de errores en esta última expresión. De la misma forma, la Ec. (9) se obtiene por propagación de errores en la función potencia, escrita del siguiente modo: $Y(X) = e^{b\ln(X) + \ln(a)}$. Este fue el razonamiento empleado en la referencia [8] para obtener las Ecs. (8) y (9). En los cálculos realizados en la referencia [8], quedó abierta la inclusión de pesos estadísticos propios para cada uno de los puntos experimentales linealizados. A todos ellos se les asocia la misma incertidumbre, igual que a la raíz cuadrada de la varianza del ajuste dada por la Ec. (7). Para que esa inclusión pueda hacerse, necesitamos conocer la compilación que se da a continuación.

2.2. Ajuste de una recta con puntos de incertidumbres conocidas.

Para puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$, el método de los mínimos cuadrados da las siguientes expresiones, cuando

se aplica a la función $y(x) = ax + b$ (ver [2] y [3], por ejemplo):

$$a = \frac{1}{D} \left[\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymj}^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{y_j}{\sigma_{ymj}^2} \right] \quad (10)$$

y

$$b = \frac{1}{D} \left[\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{y_j}{\sigma_{ymj}^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{x_j y_j}{\sigma_{ymj}^2} \right], \quad (11)$$

donde

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymj}^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \right)^2. \quad (12)$$

Las incertidumbres de los parámetros a y b y la covarianza entre ellos están dadas, respectivamente, por las expresiones:

$$\sigma_{am} = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \quad (13)$$

Análogamente obtenemos:

$$\sigma_{bm} = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}} \quad (14)$$

y

$$\text{cov}(a, b) = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}, \quad (15)$$

donde, nuevamente, D está dada por la Ec. (12). A la expresión $1/\sigma_{ymi}^2$ se le da el nombre de peso estadístico del i -ésimo punto experimental.

Debemos observar que estas expresiones son mucho más generales que las del ítem anterior, por considerar las incertidumbres de los puntos experimentales que se ajustan a una recta. Así, debemos esperar resultados mucho mejores al sustituir los valores obtenidos a través de las ecuaciones (10) a (15) en las Ecs. (8) y (9). Veamos, entonces, cómo considerar esas incertidumbres σ_{ymi} para los puntos linealizados, cuando los puntos originales $(X_i; Y_i)$, que se ajustan a las funciones potencia y exponencial, no poseen pesos estadísticos conocidos.

3. DETERMINACIÓN DE LOS PESOS ESTADÍSTICOS PARA LOS PUNTOS LINEALIZADOS

Conforme ya indicamos, el propósito de este artículo es el de utilizar pesos estadísticos para los puntos linealizados, cuando los puntos originales no poseen incertidumbres conocidas, tanto en la determinación de la función ajustada como en el cálculo de su incertidumbre. Antes, conviene resaltar que las ecuaciones (10) a (12)

se reducen a las ecuaciones (1) a (3) cuando hacemos los $\sigma_{ymi} = 1$. Por otro lado, como sólo conocemos inicialmente los valores medios de los puntos originales, y no sus incertidumbres, podemos hacer un ajuste aproximado, esto es, un pre-ajuste de la recta a los puntos $(x_i; y_i)$, siendo $x_i = X_i$ en la función exponencial y $x_i = \ln(X_i)$ en la función potencia, y $y_i = \ln(Y_i)$ en los dos casos. En este pre-ajuste debemos utilizar las Ecs. (1) y (2) para calcular los parámetros de las funciones de ajuste. Aunque ese cálculo sea apenas aproximado, ya que no considera los σ_{ymi} (por ser desconocidos), él nos permite determinar la varianza del ajuste dada por (ver [2], [8] y [9], por ejemplo):

$$\sigma_{Y(X)}^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N [Y_i - Y(X_i)]^2. \quad (16)$$

La raíz cuadrada de esta varianza nos da una medida de las incertidumbres de los puntos originales, por lo que es razonable admitir que los σ_{ymi} de los puntos originales (siendo éstos desconocidos) sean iguales a $\sigma_{Y(X)}$. Eso permite que el χ -cuadrado reducido del ajuste sea igual a 1, lo que hace el ajuste lo más verosímil posible. Este fue el procedimiento utilizado en la referencia [8] para determinar la incertidumbre de los parámetros ajustados y la covarianza entre ellos, pero allí, la varianza calculada fue la de los puntos linealizados, $\sigma_{Y(X)}^2$. Aquí haremos nuestra contribución a dicho procedimiento. Si los puntos originales poseen una incertidumbre común $\sigma_{Y(X)}$, entonces los puntos linealizados deben poseer incertidumbres que pueden ser calculadas por propagación de errores, conforme se sugiere en [10] y en [11]. Así, recordando que estamos admitiendo que los X_i originales están exentos de errores, tendremos para la linealización de las ordenadas:

$$y_i = \ln(Y_i). \quad (17)$$

Luego, podemos utilizar la fórmula general para propagación de errores que, para este caso, está dada por

$$\sigma_{ymi} = \frac{d \ln(Y_i)}{d Y_i} \sigma_{Ymi}. \quad (18)$$

Aquí, debemos resaltar que estamos admitiendo que una aproximación de primer orden se puede hacer en el cálculo del error propagado. Entonces, considerando que los puntos originales tengan las mismas incertidumbres σ_{Ymi} , y que éstas sean iguales a $\sigma_{Y(X)}$ (calculadas por la Ec. (16)) podemos finalmente escribir:

$$\sigma_{Ymi} = \frac{\sigma_{Y(X)}}{Y_i}. \quad (19)$$

La expresión anterior deja claro que con este proceso de linealización la incertidumbre de $y_i = \ln(Y_i)$ está dada por el desvío relativo de Y_i . Así, cuanto mayor sea Y_i , menor será la incertidumbre de $y_i = \ln(Y_i)$ y, consecuentemente, mayor será el peso estadístico de ese punto en el ajuste de la recta, y eso es bastante razonable en

TABLA 1

CIRCUITO RC (CORRIENTE ELÉCTRICA i VERSUS TIEMPO DE CARGA T)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(s)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
$i(\mu A)$	45.8	41.4	37.7	34.1	30.9	28.9	25.5	23.1	21.0	19.2

TABLA 2

PÉNDULO SIMPLE (PERIODO T VERSUS LONGITUD DEL PÉNDULO L)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(s)$	0.637	0.880	1.082	1.250	1.407	1.534	1.667	1.773	1.894	1.971
$L(cm)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0

ausencia de mayores informaciones sobre las incertidumbres de las ordenadas de los puntos originales.

Lo que haremos en este artículo es utilizar la Ec. (19) para determinar los pesos estadísticos de los puntos linealizados. Esto nos permitirá no sólo la determinación de los parámetros de la función ajustada, como se sugiere en [10] y [11], sino también el cálculo correcto de la incertidumbre de esa función, corrigiendo lo que se hace en la referencia [8].

Las Ecs. (17) y (19) permiten armar una “nueva tabla linealizada”, con puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$, a los que podemos aplicar las Ecs. (10)–(15), que incluyen el efecto de las incertidumbres de los puntos linealizados en el ajuste de la recta. Así, las incertidumbres de las funciones originales ajustadas pueden ser obtenidas a través de las Ecs. (8) y (9).

4. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS AJUSTES CONSIDERANDO (Y SIN CONSIDERAR) LOS PESOS ESTADÍSTICOS DE LOS PUNTOS LINEALIZADOS

Ya que estamos proponiendo un refinamiento en la técnica utilizada en la referencia [8] para la determinación de parámetros y generación de intervalos de incertidumbre en torno de la función ajustada, utilizaremos los mismos datos experimentales de aquel artículo. Ello nos permitirá hacer un análisis comparativo de los resultados obtenidos a través de las dos técnicas de linealización.

La forma para definir cuál de las dos técnicas de linealización es la mejor es bastante simple: basta comparar los resultados obtenidos por estas técnicas con los resultados obtenidos a través de la regresión no lineal. Para tal efecto, vamos a presentar los conjuntos de datos de la referencia [8]. El primero se refiere a un circuito RC en el que se midió la corriente i a lo largo de el tiempo t de carga del capacitor, conforme muestra la Tabla 1. El segundo conjunto de datos se refiere a un péndulo simple, en que se midió el periodo de las oscilaciones en función de la longitud del péndulo, conforme muestra la

Tabla 2. Como los experimentos son relativamente simples, no los detallaremos. Pasemos pues a analizar los datos de las tablas.

Los resultados obtenidos para los ajustes a través de las dos técnicas (con y sin la consideración de los pesos estadísticos de los puntos linealizados), así como para los ajustes no lineales, serán presentados a continuación. En las tablas 1 y 2, la primera línea muestra la variable independiente, la segunda línea presenta los valores de la función ajustada y la tercera línea da la incertidumbre de esos valores.

4.1. Ajustes lineales sin la consideración de los pesos estadísticos.

Los resultados de los ajustes lineales a los datos anteriores fueron presentados en la referencia [8]. Para el circuito RC, en el cual $i = ae^{bt}$, el ajuste de la recta a los puntos $(t_i, \ln(i_i))$ produjo el resultado:

$$\begin{aligned} a &= (50.40 \pm 0.33)\mu A, \\ b &= (-0.00967 \pm 0.00011)s^{-1} \quad y \\ cov(b, \ln(a)) &= -6.1 \times 10^{-7}. \end{aligned} \quad (20)$$

Con esos resultados, se puede escribir la Tabla 3 que da las informaciones generales sobre el ajuste.

Para un péndulo simple, en el cual $L(T) = aT^b$, se obtuvo:

$$\begin{aligned} a &= (25.31 \pm 0.15)cm/s^2, \\ b &= (2.011 \pm 0.013)s^{-1} \quad y \\ cov(b, \ln(a)) &= -5.0 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (21)$$

Estos parámetros llevan a los resultados para el ajuste mostrados en la Tabla 4.

Como cada conjunto de datos tiene apenas 10 puntos, y admitiendo que la fluctuación de los puntos en torno de la función ajustada pueda ser considerada como una gaussiana, los valores obtenidos para $\sigma_{Y(X)_m}$ a través de las Ecs. (8) y (9) pueden ser multiplicados por el factor 2.31, de forma que los intervalos tengan 95% de confianza.

TABLA 3

CIRCUITO RC (AJUSTE CON LINEALIZACIÓN SIN CONSIDERAR LOS PESOS ESTADÍSTICOS)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(s)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
$i(\mu A)$	45.75	41.53	37.70	34.23	31.07	28.21	25.60	23.24	21.10	19.15
$\sigma_{i(t)m}(\mu A)$	0.26	0.20	0.15	0.12	0.10	0.09	0.09	0.09	0.10	0.11

TABLA 4

PÉNDULO SIMPLE (AJUSTE CON LINEALIZACIÓN SIN CONSIDERAR LOS PESOS ESTADÍSTICOS)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(s)$	0.637	0.880	1.082	1.250	1.407	1.534	1.667	1.773	1.894	1.971
$L(T)(cm)$	10.22	19.57	29.66	39.64	50.29	59.84	70.72	80.06	91.42	99.05
$\sigma_{L(T)m}(cm)$	0.11	0.14	0.16	0.18	0.23	0.29	0.38	0.47	0.59	0.67

TABLA 5

CIRCUITO RC (AJUSTE CON LINEALIZACIÓN CONSIDERANDO LOS PESOS ESTADÍSTICOS)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(s)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
$i(t)(\mu A)$	45.73	41.52	37.70	34.22	31.08	28.22	25.62	23.26	21.12	19.18
$\sigma_{i(t)m}(\mu A)$	0.19	0.14	0.11	0.09	0.09	0.10	0.11	0.12	0.12	0.13

TABLA 6

PÉNDULO SIMPLE (AJUSTE CON LINEALIZACIÓN CONSIDERANDO LOS PESOS ESTADÍSTICOS)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(s)$	0.637	0.880	1.082	1.250	1.407	1.534	1.667	1.773	1.894	1.971
$L(T)(cm)$	10.29	19.66	29.73	39.69	50.30	59.80	70.63	79.91	91.20	98.78
$\sigma_{L(T)m}(cm)$	0.22	0.29	0.31	0.30	0.28	0.26	0.25	0.29	0.37	0.45

Con los resultados obtenidos para los ajustes podríamos extraer varias informaciones de interés en un curso inicial de Física Experimental. En el circuito RC tenemos, por ejemplo, condiciones de determinar la constante de tiempo ($\tau = -1/b$), además de tener una información inmediata sobre el valor de la corriente eléctrica en el instante en que el circuito fue cerrado (parámetro a). Con los resultados para el péndulo simple podríamos determinar la aceleración de la gravedad en el lugar del experimento, ya que $a = g/(4\pi^2)$, y podríamos todavía extraer una preciosa información sobre la presencia de errores sistemáticos, comparando el valor de b con el valor 2. Por otro lado, la incertidumbre de este parámetro nos permitiría hacer una evaluación de la precisión experimental. Sin embargo, el objetivo de este artículo es simplemente discutir un refinamiento en la técnica de linealización presentada en la referencia [8],

buscando determinar la precisión de los parámetros ajustados así como el intervalo de incertidumbre relativa a la función ajustada. Ese refinamiento se describió en §3; pasemos pues a mostrar los resultados obtenidos.

4.2. Ajustes lineales con la consideración de los pesos estadísticos.

Presentaremos a continuación los resultados de los ajustes de las rectas a los puntos linealizados del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$, siendo que los σ_{ymi} fueron obtenidos a través de la Ec. (19). Esto requiere un preajuste con el uso de las Ecs. (1) y (2) para que $\sigma_{Y(X)}$ pueda ser determinado por la Ec. (16). La aplicación de las Ecs. (10)—(15) nos da los siguientes resultados para la función ajustada:

TABLA 7

AJUSTE NO LINEAL DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL PARA LOS DATOS DE LA TABLA 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(s)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
$i(t)(\mu A)$	45.73	41.52	37.69	34.22	31.07	28.21	25.62	23.26	21.12	19.17
$\sigma_{i(t)m}(\mu A)$	0.19	0.14	0.11	0.09	0.09	0.10	0.10	0.11	0.12	0.13

TABLA 8

AJUSTE NO LINEAL DE LA FUNCIÓN POTENCIA PARA LOS DATOS DE LA TABLA 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(s)$	0.637	0.880	1.082	1.250	1.407	1.534	1.667	1.773	1.894	1.971
$L(T)(cm)$	10.29	19.65	29.73	39.69	50.29	59.79	70.62	79.90	91.19	98.76
$\sigma_{L(T)m}(cm)$	0.22	0.29	0.31	0.31	0.28	0.26	0.25	0.29	0.37	0.45

$$\begin{aligned} a &= (50.36 \pm 0.25)\mu A, \\ b &= (-0.00966 \pm 0.00010)s^{-1} \quad y \\ cov(b, \ln(a)) &= -4.28 \times 10^{-7}. \end{aligned} \quad (22)$$

con $\sigma_{Y(X)} = 0.274\mu A$.

Así, con $i = ae^{bt}$ y utilizando la Ec.(8), construimos la Tabla 5.

Para el péndulo simple, la aplicación de las Ecs. (10)—(15) nos da los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} a &= (25.39 \pm 0.31)cm/s^2, \\ b &= (2.002 \pm 0.021)s^{-1} \quad y \\ cov(b, \ln(a)) &= -2.47 \times 10^{-4}. \end{aligned} \quad (23)$$

con $\sigma_{Y(X)} = 0.693cm$.

Así, con $L = aT^b$ y utilizando la Ec. (9), construimos la Tabla 6.

4.3. Ajustes no lineales.

Nos limitaremos a presentar los resultados para los ajustes de las funciones exponencial y potencia a los datos de las tablas 1 y 2, respectivamente. Esos ajustes fueron realizados en dos paquetes computacionales distintos: “Origin” y “LAB Fit”². Ambos presentaron los mismos resultados, dados a continuación.

Para el ajuste no lineal de la función exponencial, encontramos:

$$\begin{aligned} a &= (50.36 \pm 0.25)\mu A, \\ b &= (-0.00966 \pm 0.00010)s^{-1} \quad y \\ cov(b, a) &= -2.112 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (24)$$

con $\sigma_{Y(X)} = 0.271\mu A$.

Con esos resultados se construye la Tabla 7.

En el caso del péndulo, el ajuste no lineal de la función potencia para los datos nos da:

$$\begin{aligned} a &= (25.39 \pm 0.31)cm/s^2, \\ b &= (2.002 \pm 0.021)s^{-1} \quad y \\ cov(b, a) &= -6.326 \times 10^{-3}. \end{aligned} \quad (25)$$

con $\sigma_{Y(X)} = 0.694cm$.

Así, referente al ajuste, construimos la Tabla 8.

Con los datos obtenidos en las tablas 5 y 6 (equivalentes a los de las tablas 7 y 8), podríamos trazar los gráficos de las funciones ajustadas, como se hizo en [8], involucrando tres líneas: una central, obtenida a través de $Y(X)$ y dos líneas más definiendo un intervalo de confianza, obtenidas a través de $\sigma_{Y(X)m}$.

5. CONCLUSIONES

Como algunos textos mencionan y varios paquetes computacionales (inclusive los de calculadoras) utilizan la técnica de linealización de las funciones potencia y exponencial, sin la consideración de pesos estadísticos cuando los puntos experimentales son del tipo $(X; Y)$, es necesario que lectores y usuarios tomen conocimiento de las limitaciones de esta técnica que es bastante usual. Más que eso, es necesario también saber cómo superar esas limitaciones, que es lo que discutimos aquí, y cuyos resultados analizaremos a continuación.

Al comparar, a través de simples inspecciones, los ajustes sin la consideración de los pesos estadísticos de los puntos linealizados con los ajustes no lineales correspondientes, percibimos que realmente la concordancia entre los resultados no es muy buena. Una inspección en los resultados (20) y (24) y aun en (21) y (25) muestra que, aunque haya una “cierta compatibilidad” entre los valores medios de los parámetros obtenidos por las técnicas lineal (sin la consideración de los pesos estadísticos) y no lineal, los valores de las incertidumbres de estos parámetros son significativamente diferentes. Por otro lado, la consideración de las incertidumbres de los puntos

²www.extensao.hpg.com.br

linealizados, discutida en este artículo y obtenidas por propagación de errores, produce ajustes lineales en completo acuerdo con los correspondientes ajustes no lineales. Una inspección en los resultados (22) y (24) y aun en (23) y (25) nos permite afirmar que, en terminos prácticos, los ajustes son idénticos.

Hay que resaltar que el resultado final del ajuste para cada función puede ser representado a través de un gráfico que involucra tres líneas. La línea central, referente a la función ajustada $Y(X)$, y dos líneas delimitando un intervalo de incertidumbre $\sigma_{Y(X)m}$ en torno de la función, lo que da una indicación visual del intervalo de confianza de esa función ajustada. Dicho intervalo se calcula a través de la tercera línea de cada tabla de resultados y, comparando los $\sigma_{Y(X)m}$ dados en las tablas 3 y 7 y también aquellos dados en las tablas 4 y 8, percibimos un completo desacuerdo entre los resultados. Una comparación entre los $\sigma_{Y(X)m}$ dados en las tablas 5 y 7 y también entre aquellos dados en las tablas 6 y 8 permite afirmar que las precisiones de las funciones ajustadas definen los mismos intervalos de incertidumbre.

Así, en el ajuste de las funciones potencia y exponencial para datos del tipo (X, Y) , la técnica de linealización con la consideración de los pesos estadísticos (generados a partir de las fluctuaciones de los puntos experimentales, y obtenidos por propagación de errores), propuesta en este artículo, no produce distorsiones apreciables en los resultados obtenidos y pueda ser considerada equivalente a la técnica no lineal. Naturalmente, el estudio

desarrollado aquí limita esa afirmación a los ajustes en que el cálculo del error propagado pueda ser hecho dentro de una aproximación de primer orden.

REFERENCIAS

- [1] Hennies, Curt E. et al., Problemas Experimentais em Física, Vol. 1, Editora da Unicamp, Campinas, 2a Edição, (1988) pág. 190
- [2] Silva, Wilton P. et al, Tratamento de Dados Experimentais, UFPB/Editora Universitária, João Pessoa, 2a Edição (1998), pág. 141, 155, 161, 157
- [3] Vuolo, José H., Fundamentos da Teoria de Erros, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1 a Edição, (1992) pág. 158, 161
- [4] Button, Conrad - Kurv+ for Windows, USA (1992-1996) - Conrad Button's Software, 20230 Lake Riley Rd. Arlington, WA, 98223
- [5] CRVPLOT V 6.24, USA (1990-1997) - Simply Software, 5572 Kingsburg Rd. Fairfield, OH, 45014
- [6] Cox, Thomas S. - Curvefit V 2.10-0, USA (1987)
- [7] La mayoría de las calculadoras con interfaz gráfica.
- [8] Silva, Wilton P. et al., Rev. Bras. Ensino de Física, 21, 341, (1999)
- [9] Bechhoefer, John, Am. J. Phys. 68, 424, (2000)
- [10] Bevington, P. R. and Robinson, D. K., Data Reduction and Error Analysis for Physical Sciences, McGraw-Hill, New York, 2nd ed., (1992) pág. 134.
- [11] Taylor, J. R., An Introduction to Error Analysis, 2nd Edition, University Science Books, Sausalito, California (1997), pág. 194,195,196

LA MAGIA DE LA FÍSICA

Emiliana Juaniquina, Ramiro Valdéz, Verónica Ergueta

Carrera de Física—UMSA

La Paz, Bolivia

RESUMEN

Consiste en reproducir experimentos sencillos, de fácil comprensión que describen principios físicos básicos para ser explicados y demostrados al público en general.



1. INTRODUCCIÓN

Esta actividad surgió inicialmente hace algunos años por iniciativa estudiantil, con apoyo de algunos docentes y administrativos para un aniversario de la Carrera, pero es recién hace dos años que se convierte en una actividad periódica y sostenida por los propios estudiantes e impulsada por el Centro de Estudiantes.

El objetivo de “La Magia de la Física” es el de ofrecer un programa de difusión y divulgación de la física a través de experimentos interactivos de fácil comprensión, que demuestran principios y leyes básicas de esta ciencia, estimulando de esta forma a que cualquier estudiante, docente o administrativo interesado pueda presentar algún experimento o demostración que le resulte atractiva y didáctica. Estas exposiciones se vienen realizando periódicamente en diferentes plazas públicas y en algunos establecimientos educativos, contando en cada caso, con la grata aceptación del público.

2. EXPERIMENTOS

Detallamos a continuación algunos de los experimentos que conforman “La Magia de la Física”:

La cascada de humo

Material: Frasco transparente con un pequeño orificio cerca de su base, conos de papel, fósforos o encendedor.

Experiencia: Se coloca el frasco con la boca hacia abajo, se introduce el piquito del cono de papel en el orificio del frasco, enseguida se prende con fuego la boca ancha del cono de papel que queda fuera del frasco, y se va observando que mientras se va quemando el cono de papel empieza a salir por el piquito del cono, dentro del frasco, una verdadera cascada de humo, estrellándose sobre la mesa y formando anillos concéntricos de humo, tal como lo hace una cascada de agua que tantas veces vimos en paseos, plazas, películas o televisión. Pero ¿por qué sucede esto?, si es bien sabido, por experiencia cotidiana, que el humo siempre tiende a subir en vez de bajar.

Explicación: Lo que está ocurriendo es que mientras se va quemando el cono de papel se va calentando el interior del frasco, quedando todo a una misma temperatura, y como el humo es más denso que el

aire, este caerá en vez de subir. Lo contrario ocurre fuera del frasco, donde el aire que nos rodea está más frío que el humo caliente, por lo cual éste sube. Sabemos que la densidad de los gases es inversamente proporcional a la temperatura, por lo tanto son menos densos si tienen mayor temperatura.

La gota de aceite

Material: Recipiente ancho transparente, agua, alcohol, aceite, vasito pequeño y jeringa.

Experiencia: Se introduce en el recipiente vacío el vasito lleno de aceite, y luego se va vertiendo lentamente alcohol hasta cubrir el vasito, en este momento se llena la jeringa con agua y vamos llenando el recipiente, tan lentamente como antes. De a poco iremos observando como el aceite empieza a abandonar el vasito, suspendiéndose en la solución agua—alcohol en forma esférica, flotando en medio de esta solución como una pelotita de aceite. ¿Por qué la gota de aceite permanece en medio de la solución?

Explicación: Este fenómeno se atribuye al cambio de densidades que experimenta el alcohol con el agua, ya que al principio, el aceite permanece al fondo de el alcohol por ser éste más denso, luego al verter agua, la solución agua—alcohol se va haciendo más densa, como el aceite no se mezcla con la solución y permanece constante su densidad, ésta se va haciendo menos densa respecto a la solución y queda en medio de la solución debido a la relación agua—alcohol. Si vertimos más alcohol, la gota irá bajando y si vertimos agua, la gota irá subiendo, cumpliéndose el principio de Arquímedes —los cuerpos menos densos flotan sobre los más densos—.

El guante encantado

Material: Guante de papel o servilletas, una moneda —mientras más grande mejor—, cigarrillos y fósforos o encendedor.

Experiencia: Se enciende un cigarrillo, se toma el guante de papel y se muestra como éste se quema rápidamente al acercarse el cigarrillo prendido a él, formándose un agujero que va agrandándose cada vez más si mantenemos cerca el cigarrillo, fenómeno muy bien conocido por todos. Ahora viene la magia; se coloca la moneda sobre la palma de la mano, mucho mejor si el público no lo nota, y encima el guante de papel, cubriendo la moneda, entonces se procede a hacer lo mismo que anteriormente, se acerca el cigarrillo hacia nuestra mano enguantada, que cubre la moneda, y se aprieta con fuerza el cigarrillo sobre ella hasta apagarlo, se retira el cigarrillo y se limpia la ceniza del guante, y ¡sorpresa! se ve que el guante de papel queda tan limpio e intacto como en un principio, sin haberle afectado para nada el calor del cigarrillo. ¿Qué ocurrió, por qué el guante de papel no se quema ahora?

Explicación: Sucede que al acercar el cigarrillo al guante de papel sobre la moneda, ésta “absorbe” el calor del cigarrillo, calor que pasa a través del papel sin dañarlo. Esto es debido a la capacidad calorífica de los materiales, en este caso, la moneda tiene mayor capacidad calorífica que la del papel. Como el calor se transmite en forma de energía este pasa sin dañar al guante de papel, energía que es absorbida por la moneda.

La varilla y la pelota de ping pong

Material: Una varilla pequeña y una pelotita de ping pong.

Experiencia: Se toma la varilla en posición vertical y se coloca la pelotita de ping pong en su extremo superior, el extremo libre de la varilla se coloca sobre los labios y se empieza a soplar por ella y se observa que la pelotita de ping pong no cae. A continuación se pone la pelotita sobre la mesa y nuevamente soplamos a través de la varilla en dirección de la pelotita y se observa que ésta se pega a la boquilla de la varilla. ¿Por qué al soplar con la varilla la pelotita es atraída a la boquilla en vez de alejarse de ella?

Explicación: Lo que observamos es el principio de Bernoulli; el cual nos dice que los fluidos que experimentan velocidad tienen una menor presión. Al soplar a través de la varilla, el fluido —aire— tiene una velocidad cuando sale por la boquilla, produciéndose una cierta presión, menor respecto a la presión atmosférica, alrededor de las paredes de la pelotita cercanas a la boquilla. Por otro lado, en la parte opuesta de la pelotita, es la presión atmosférica la que la rodea, por lo tanto la pelotita de ping pong es empujada hacia la boquilla.

Las ruedas de Faraday

Material: Discos de aluminio (algunos sólidos, otros con muescas y pequeños agujeritos y otros discontinuos), un plano inclinado e imanes permanentes.

Experiencia: Primero se muestra al público que los discos de aluminio no son atraídos por los imanes. Luego se deja rodar sobre el plano inclinado cada uno de los discos de aluminio y observamos que todos ellos salen con una determinada velocidad al final del plano. Ahora se coloca los imanes a ambos lados del final del plano inclinado, se procede de igual manera con cada uno de los discos, como hicimos al inicio, y ahora observamos que algunos de ellos son detenidos bruscamente por los imanes al final del plano inclinado y otros no. ¿Por qué al salir de la pendiente algunos discos son frenados?

Explicación: Lo que estamos observando es la ley de inducción de Faraday, la cual nos dice que en presencia de un campo magnético, la variación temporal del flujo magnético que atraviesa el plano de la ruedita, genera un voltaje que a su vez da

lugar a una corriente eléctrica y ésta a un campo magnético inducido. Así, la ruedita se comporta como un pequeño electroimán que interactúa con el imán permanente. En otras rueditas existen

ranuras radiales que impiden la circulación de corriente inducida, y por lo tanto no se crea un campo magnético así que la ruedita pasa de largo.

8^{VA} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Bustos R., Velarde A., Palenque E.

Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)
Carrera de Física - Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)
La Paz-Bolivia

RESUMEN

Se presentan los exámenes de la 8^{va} Olimpiada Boliviana de Física. Estos corresponden a los niveles de Tercero y Cuarto de Secundaria y fueron tomados en fechas 21 y 22 de Agosto de 2003 en Santa Cruz de la Sierra.



8va OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Comité Organizador:

Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)
Ministerio de Educación – Republica de Bolivia
Academia Nacional de Ciencias de Bolivia (ANCB)
Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA)
Carrera de Física – Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)

EXAMEN – 3ro de Secundaria

(1700200021082003)

- Instrucciones:
- Lee todo el examen y consulta si tienes alguna duda.
 - NO coloques tus datos personales ni en la hoja del examen ni en las hojas de tus soluciones!, se te dará un formulario para eso.
 - La parte conceptual vale 40% y la parte practica 60%.
 - Tienes un tiempo de 3 horas.

PARTE CONCEPTUAL

1. Explicar analíticamente la fuerza ascensional dinámica que actúa sobre las alas de un avión.
2. En una caja de masa M , que cuelga de un hilo delgado, golpea una bala de masa m , que vuela horizontalmente con una velocidad v_0 desconocida. La bala se incrusta en la caja lo que hace que esta se eleve una altura h . Calcule la velocidad de la bala.
3. Una moneda está sumergida en agua a una profundidad H . Si miramos desde arriba y en dirección vertical ¿a que profundidad vemos la moneda?
4. Una persona salta de un avión y va cayendo muy rápidamente a través del aire, su aceleración (explique):
 - a) Crece
 - b) Decrece
 - c) Se mantiene constante

PARTE PRACTICA

1. En el último segundo de caída libre de un objeto este recorre las tres cuartas partes de todo su camino. El cuerpo sale del reposo. En cuanto tiempo llega al piso? De Que altura cae?
2. Una barra que se mueve hacia abajo y hacia arriba una distancia total de 5 mm genera una onda sinusoidal transversal en el extremo de una cuerda larga horizontal. El movimiento es continuo y se repite regularmente 120 veces por segundo
 - a. Si la cuerda tiene una densidad lineal de 0.25 Kg/m y se mantiene bajo una tensión de 90 N determinar la rapidez, amplitud, frecuencia y longitud de onda del movimiento ondulatorio.
 - b. Escribir la ecuación de onda suponiendo que la onda se mueva en el sentido $+xy$ y que en el tiempo $t = 0$, el extremo de la cuerda descrito por $x = 0$ esté en su posición de equilibrio $y = 0$.
3. Un espejo convexo tiene un radio de curvatura de 20 cm. Si una fuente puntual se coloca a 14 cm del espejo sobre el eje óptico ¿donde se encuentra la imagen?

8va OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Comité Organizador:

Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)
Ministerio de Educación – Republica de Bolivia
Academia Nacional de Ciencias de Bolivia (ANCB)
Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA)
Carrera de Física – Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)

SOLUCIONES

PARTE CONCEPTUAL

1. El ángulo de ataque del ala produce una desviación del aire hacia abajo. De la 3ra ley de Newton la reacción a esta fuerza descendente del ala sobre el aire es una fuerza ascendente **F**, o empuje, ejercida por el aire sobre el ala. Las líneas de corriente de aire en torno al ala de un avión hacen que la velocidad del aire por encima del ala tenga mayor magnitud que la velocidad del aire por debajo de esta, lo que implica que la presión arriba del ala sea menor que la presión abajo lo cual crea un empuje ascendente a las alas.

2. De la conservación del momentum: $mV = (m + M)V_B$. De la conservación de la energía: $mV^2 / 2 = (m + M)V_B^2$, $E = (m + M)gh = (mV)^2 / 2(m + M)$, $V^2 = 2gh(m + M)^2 / m^2$, de donde finalmente se obtiene: $V = \sqrt{2gh(m + M)} / m$

3. $h = 3H/4$

4. La aceleración decrece debido a que la fuerza neta sobre la persona también decrece. La fuerza neta es igual a su peso menos la resistencia del aire, y como la resistencia del aire aumenta con el incremento de la velocidad, la fuerza neta y en consecuencia su aceleración decrece. De la segunda Ley de Newton:

$$a = \frac{F_{NETA}}{m} = \frac{mg - R}{m}$$

donde **mg** es el peso del paracaidista, y **R** es la resistencia del aire que se encuentra en la caída libre. Como **R** crece, **a** decrece. Nota que si el paracaidista cae lo suficientemente rápido tal que **R=mg**, entonces **a=0**, lo que significa que sin aceleración la velocidad de caída será constante.

Realicemos un paso adicional en la ecuación que se deriva de la 2ª ley de Newton: dividamos **mg** y **R** por **m** para obtener

$$a = g - \frac{R}{m}$$

Nota que la aceleración **a** siempre será menor a **g** si la resistencia del aire **R** se opone a la caída. Solo cuando **R=0** se tendrá **a = g**.

8va OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Comité Organizador:

Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)
Ministerio de Educación – Republica de Bolivia
Academia Nacional de Ciencias de Bolivia (ANCB)
Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA)
Carrera de Física – Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)

PARTE PRACTICA

1. $t = 2$ segundos. $H = 19.6$ metros
2.
 - a. El extremo se mueve a 0.25 cm a partir de la posición de equilibrio primero por encima de ella y después por debajo; por lo tanto la amplitud es 0.25 cm. El movimiento completo se repite 120 veces cada segundo, de modo que la frecuencia es $\nu = 120$ Hz. La rapidez de la onda esta dada por $V = \sqrt{F/\mu}$ de donde $V = 19$ m/s. La longitud de onda está dada por $\lambda = V/\nu = 16$ cm.
 - b. La expresión general para una onda sinusoidal transversal que se mueve en la dirección $+x$ es $y = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)$. Como se quiere que $y = 0$ en las condiciones $x = 0$ y $t = 0$, entonces la fase ϕ debe tomarse igual a cero. Por tanto la ecuación queda: $y = y_m \sin(kx - \omega t)$ y con los valores recién encontrados la ecuación de la onda es: $y = 0.25 \sin(0.39 x - 740 t)$, en donde x e y están expresadas en centímetros y t en segundos.
3. Usando la ecuación $\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$ y notando que r es negativa debido a que el centro de curvatura del espejo está en el lado Virtual. Por tanto $\frac{1}{14\text{cm}} + \frac{1}{i} = \frac{2}{-20\text{cm}}$, que da como resultado $i = -5.8$ cm. El signo negativo recuerda que la imagen está en el lado virtual del espejo. También se puede resolver el problema gráficamente.

8va OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Comité Organizador:

Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)
Ministerio de Educación – Republica de Bolivia
Academia Nacional de Ciencias de Bolivia (ANCB)
Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA)
Carrera de Física – Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)

EXAMEN – 4to de Secundaria

(1700200021082003)

Instrucciones: – Lea todo el examen y consulte si tienes alguna duda – NO coloque sus datos personales ni en la hoja del examen ni en las hojas de sus soluciones!, se le proporcionará un formulario para eso – Tiene un tiempo de 3 horas.

PARTE CONCEPTUAL

- Un estudiante se para sobre una plataforma giratoria (eje de rotación vertical). Entre sus manos sujeta verticalmente el eje de una rueda de bicicleta pesada. La rueda gira alrededor de su eje con una rapidez constante ω_0 , pero el estudiante y la plataforma están en reposo. ¿Que sucede cuando el estudiante cambia la dirección de la rotación de la rueda? Es decir gira el eje de la rueda un dado ángulo. Explique.
- Representar gráficamente el ciclo de Carnot en un diagrama Presión – Volumen y demostrar que la eficiencia de una máquina de Carnot que utiliza un Gas Ideal como sustancia de trabajo es $e = (T_1 - T_2)/T_1$ donde T_1 y T_2 son las Temperaturas inicial y final respectivamente. Ayuda: El trabajo por mol n hecho por un Gas Ideal en una dilatación isotérmica a la temperatura T desde un volumen inicial V_i hasta un volumen final V_f es:

$$\frac{W}{n} = RT \ln \frac{V_f}{V_i}.$$
- Dibuje las líneas de fuerza del campo creado por dos cargas de signos contrarios ($+q_1$ y $-q_2$), bajo la condición de que una de las cargas (por ejemplo $+q_1$) es cuatro veces mayor que la otra.
- Dos delfines se mueven al encuentro. Uno de ellos emite impulsos sonoros con la frecuencia de repetición ν ¿Con que frecuencia ν' llegan estos impulsos al otro delfín si la velocidad de los delfines respecto al agua es igual a V ? La velocidad del sonido en el agua es c . La distancia a la que están los delfines inicialmente es L . Deduzca su respuesta.

PARTE PRACTICA

- Al péndulo AB con la bolita de la masa M está suspendido el péndulo BC con la bolita de la masa m como se aprecia en la *figura 1*. El punto A ejecuta oscilaciones en dirección horizontal con el periodo T . Hallar la longitud L del hilo BC si se conoce que el hilo AB permanece vertical.
- Un espejo convexo tiene un radio de curvatura de 20 cm. Si una fuente puntual se coloca a 14 cm del espejo sobre el eje óptico ¿donde se encuentra la imagen?
- En cuanto tiempo llega al suelo la masa m_2 del sistema de la *figura 2*? Considere despreciables las masas de las poleas y de los hilos. El movimiento comienza del reposo. Datos: $m_1 = 1$ Kg., $m_2 = 10$ Kg., $\mu = 0.5$, $h = 1$ m.

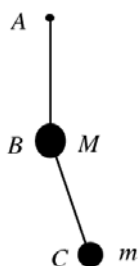


figura 1

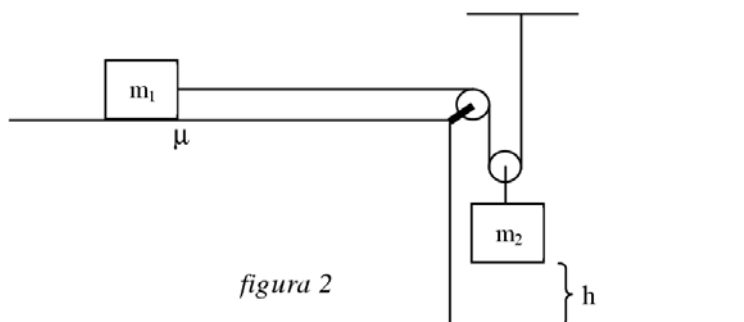


figura 2

8va OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Comité Organizador:

Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)
Ministerio de Educación – Republica de Bolivia
Academia Nacional de Ciencias de Bolivia (ANCB)
Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA)
Carrera de Física – Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)

SOLUCIONES PARTE CONCEPTUAL

- Consideremos que el sistema es el estudiante más la plataforma más la rueda. El momento cinético total inicial de este sistema $I_0\omega_0$, proveniente de la rueda en rotación, siendo I_0 la inercia rotacional de la rueda alrededor de su eje; ω_0 apunta verticalmente hacia arriba *Figura 1aS*:



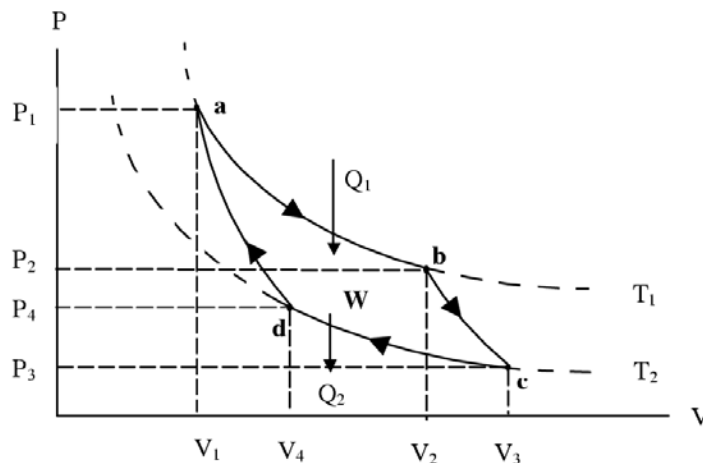
Después el estudiante gira el eje de la rueda un ángulo respecto a la vertical para lo cual debe aplicar una torca interna al sistema. Como no hay una componente externa de la torca sobre el sistema respecto al eje vertical, la componente vertical del momento cinético del sistema debe conservarse. Sin embargo, como la rueda está girando en torno a un eje que forma un ángulo θ respecto de la vertical, contribuye con una componente vertical de solo $I_0\omega_0 \cos \theta$ al momento cinético del sistema. Por lo tanto el estudiante y la plataforma deben suministrar el momento cinético adicional respecto al eje vertical tal que el sistema (estudiante más base giratoria) empiezan a girar. Este momento cinético vertical extra $I_e\omega_e$ al añadirse al $I_0\omega_0 \cos \theta$, debe ser igual al valor inicial del momento cinético vertical del sistema $I_0\omega_0$ (ley de conservación del momento cinético). Es decir,

$$I_e\omega_e = I_0\omega_0 - I_0\omega_0 \cos \theta = I_0\omega_0 (1 - \cos \theta)$$

Donde I_e es la inercia rotacional del estudiante y de la plataforma respecto al eje vertical, y ω_e es su rapidez angular alrededor de dicho eje, *Figura 1bS*.

Cuando el estudiante hace girar el eje de la rueda ejerce sobre el una torca que dura un tiempo Δt , que es el que se invierte en reorientar al eje. La componente de la reacción a esta "torca – impulso" actúa sobre el estudiante pudiendo explicar así el momento cinético vertical que adquieren el y la plataforma.

- Podemos representar gráficamente el ciclo de Carnot para un Gas Ideal en un diagrama Presión – Volumen como:



Donde:

- Q_1 es el calor absorbido por el sistema
- Q_2 es el calor cedido por el sistema
- W es el Trabajo neto efectuado por el sistema durante el ciclo.
- T_1 es la Temperatura inicial

8va OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Comité Organizador:

Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)
Ministerio de Educación – Republica de Bolivia
Academia Nacional de Ciencias de Bolivia (ANCB)
Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA)
Carrera de Física – Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)

- T_2 es la Temperatura final. Notar que $T_1 > T_2$
- V_1, V_2, V_3 y V_4 son los volúmenes del sistema en sus distintas etapas
- P_1, P_2, P_3 y P_4 son las presiones del sistema también es sus distintas etapas
- **a, b, c y d** son los puntos que resaltan el ciclo de Carnot
- e es la eficiencia

La eficiencia e de una maquina térmica es la relación entre el trabajo neto efectuado por la máquina durante un ciclo y el calor que se toma de la fuente a mayor temperatura en el mismo ciclo, es decir: $e = \frac{W}{Q_1}$ pero

$$W = Q_1 - Q_2 \text{ (1ra ley de la Termodinámica), entonces: } e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Ahora, a lo largo de la trayectoria Isotérmica **ab**, la Temperatura y por lo tanto la energía interna de un Gas Ideal permanecen constantes. De la primera ley, el calor Q_1 absorbido por el gas en su dilatación debe ser igual al trabajo W , efectuado en esta dilatación es decir: $Q_1 = W_1 = nRT_1 \ln(V_2/V_1)$.

De igual manera a lo largo de la trayectoria **cd**, tenemos $Q_2 = W_2 = nRT_2 \ln(V_3/V_4)$.

Dividiendo estas dos últimas ecuaciones, obtenemos:
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1 \ln(V_2/V_1)}{T_2 \ln(V_3/V_4)}.$$

Para un Gas Ideal en las trayectorias **ab** y **cd** (procesos isotérmicos) se cumplen las ecuaciones: $P_1V_1 = P_2V_2$ y $P_3V_3 = P_4V_4$ respectivamente.

Para las trayectorias **bc** y **da** (procesos adiabáticos) para un Gas Ideal se cumplen las ecuaciones: $P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma$ y $P_4V_4^\gamma = P_1V_1^\gamma$ respectivamente.

Multiplicando estas cuatro ecuaciones termino a termino y suprimiendo el factor constante $P_1P_2P_3P_4$ que aparece en ambos miembros, y simplificando obtenemos finalmente $V_2/V_1 = V_3/V_4$.

Por lo tanto $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$, de modo que finalmente $e = 1 - T_2/T_1$.

3. Para encontrar la intensidad resultante en el punto **r**, se debe sumar vectorialmente las intensidades de cada una de las cargas, las que están representadas por los vectores $E_1(\mathbf{r})$ y $E_2(\mathbf{r})$, tal que $E(\mathbf{r}) = E_1(\mathbf{r}) + E_2(\mathbf{r})$. Usando esta regla se escogen unos cuantos puntos en el espacio circundante al dipolo construyendo en cada uno de ellos el par de vectores de las intensidades del campo. Luego hacemos la suma vectorial en cada uno de los puntos escogidos obteniendo los vectores resultantes $E_A, E_B, E_C, \dots$ Estos vectores deben ser tangentes a las líneas de fuerza del campo en los puntos correspondientes y son directamente proporcionales a la magnitud del campo en ese lugar. Siguiendo esta regla podemos graficar las líneas de fuerza y concluir que la influencia de la carga $+q_1$, se hace más fuerte y el campo creado por esta empieza a dominar completamente sobre el campo creado por la carga $-q_2$.
4. Sea que en el momento inicial de tiempo ($t = 0$) los delfines se encuentran a la distancia L y el primer delfín emite un impulso. El segundo delfín recibirá este impulso al cabo del lapso de tiempo t_1 . En ese tiempo el sonido recorrerá el camino $L - Vt_1$. Consiguientemente $t_1 = (L - Vt_1)/c$. El siguiente impulso es emitido por el primer delfín dentro del lapso de tiempo $T = 1/v$. Este impulso llegará hasta el segundo delfín en el momento de tiempo $t_2 = T + \frac{(L - Vt_1) - VT - V(t_2 - t_1)}{c}$. Al restar estas dos ecuaciones y notando que $t_2 - t_1 = T'$ obtenemos $T' = T - \frac{V}{c}(T + T')$, de donde hallamos: $T' = T \frac{c - V}{c + V}$, por consiguiente, la frecuencia de repetición de los impulsos que percibe el segundo delfín es igual a $v' = v \frac{c + V}{c - V}$, variación conocida como *Efecto Doppler*.

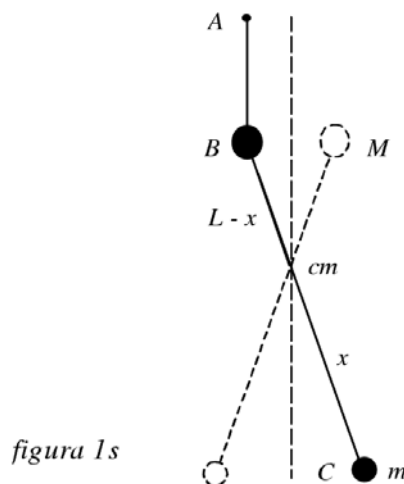
8va OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Comité Organizador:

Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)
Ministerio de Educación – Republica de Bolivia
Academia Nacional de Ciencias de Bolivia (ANCB)
Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA)
Carrera de Física – Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)

PARTE PRACTICA

- Ya que el hilo AB permanece vertical, en la bola de masa M durante el movimiento del sistema no actúan las fuerzas horizontales. Esto significa que las fuerzas horizontales tampoco actúan en el sistema constituido por las dos bolas M y m , y las bolas deben moverse de modo que su centro de masas no se desplace en el sentido horizontal (*figura 1s*). Por ello la bola de masa m se mueve como si estuviese fijada al hilo de largo x (en donde x es la distancia entre la bola y el centro de masas). El periodo de oscilaciones de tal péndulo es $T = 2\pi\sqrt{x/g}$. Este período, por lo visto, es igual al período de oscilaciones del punto A . Hallemos ahora x . Con arreglo a la propiedad del centro de masas tenemos: $xm = (L-x)M$, de donde $x = L \frac{M}{m+M}$. Por lo tanto el período de oscilaciones será $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g} \frac{M}{m+M}}$, de donde $L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \frac{m+M}{M}$.



- Usando la ecuación $\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$ y notando que r es negativa debido a que el centro de curvatura del espejo está en el lado Virtual. Por tanto $\frac{1}{14cm} + \frac{1}{i} = \frac{2}{-20cm}$, que da como resultado $i = -5.8 cm$. El signo negativo recuerda que la imagen está en el lado virtual del espejo. También se puede resolver el problema gráficamente.
- Usando las ecuaciones $\sum F_x = ma_x$ y $\sum F_y = ma_y$ (2da ley de Newton) así como también $t = \sqrt{\frac{2h}{a_y}}$ se halla que $t = 0.56$ segundos.

VIII Olimpiada Boliviana de Física
Santa Cruz, 21, 22 de Agosto 2003.

PRUEBA EXPERIMENTAL POR DELEGACIONES

PÉRDIDA DE PRESIÓN HIDRAÚLICA.¹

1.- Planteamiento del problema a tratar en el experimento.

En la figura mostramos el dispositivo experimental para estudiar la pérdida de presión debida al estrangulamiento del flujo al pasar de la botella a la bombilla. Punto “A” en la figura.

De la ecuación de Bernoulli para los puntos 1 y 2 de una línea de flujo tenemos:

$$\rho gH + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 = 0$$

ρ es la densidad del líquido.

$$v_1^2 \ll v_2^2$$

porque el área de la botella s_1 es muy grande comparada con el área s_2 de la bombilla por donde descarga el líquido. De modo que:

$$\frac{s_2}{s_1} \ll 1$$

Esto se obtiene de la ecuación de continuidad:

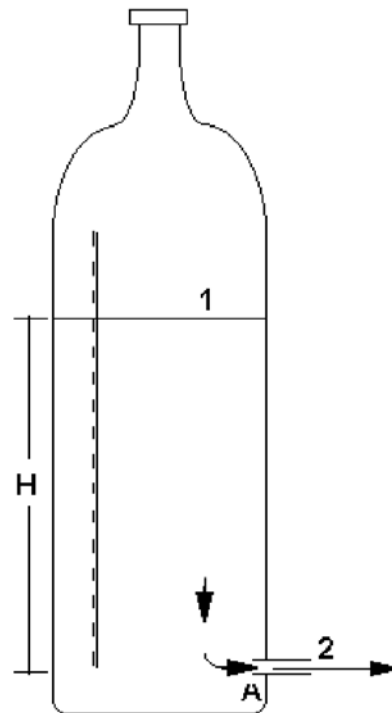
$$s_1 v_1 = s_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{s_2}{s_1} v_2 \ll v_2$$

Entonces:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gH = 0$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gH$$



¹ Referencia: “Pin-hole water flow from cylindrical bottles”, Paulo Murilo Castro de Oliveira et.al., Phys. Educ. 35(2), March 2000

Donde v es la velocidad con que descarga el líquido por la bombilla.

Sin embargo, en el estrangulamiento (punto A), se produce una pérdida de presión de manera que la ecuación de Bernoulli ya no es válida y se debe corregir por:

$$\rho g H - \frac{1}{2} \rho v^2 = \Delta P$$

$$\Rightarrow v^2 = 2g(H - h)$$

Donde:

$$h = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

ΔP es la pérdida de presión.

Consideremos dos valores v y v' de la velocidad de descarga, muy próximos, correspondientes a las alturas H y H' respectivamente, de modo que:

$$v^2 = 2g(H - h)$$

$$v'^2 = 2g(H' - h)$$

La variación es:

$$v'^2 - v^2 = 2g(H' - H)$$

$$(v' - v)(v' + v) = 2g\Delta H$$

ΔH es la variación en la altura del líquido.

$\Delta v = v' - v$ es la variación de la velocidad de descarga.

Como v' y v son muy próximos: $v' + v \cong 2v$.

Entonces:

$$v\Delta v = g\Delta H$$

Sea V , la velocidad con que baja el líquido. Como vimos:

$$s_1 V = s_2 v$$

$$v = \frac{s_1}{s_2} V$$

Luego:

$$\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 V \Delta V = g \Delta H$$

Sea Δt el tiempo en que se ha producido la variación. Dividiendo la anterior ecuación entre Δt y teniendo en cuenta que $V = -\frac{\Delta H}{\Delta t}$ (el signo menos se debe a que la altura disminuye), tenemos:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 g$$

El cambio de velocidad por unidad de tiempo del líquido al bajar (en este caso se trata de una deceleración), es constante. Esto quiere decir que la velocidad del líquido al bajar disminuye linealmente con el tiempo.

2.- Experimento.

En términos de la velocidad con que disminuye la altura del líquido:

$$V^2 = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 2g(H - h)$$

$$V^2 = k(H - h)$$

Graficar V^2 vs. H .

Encontrar h .

Calcular ΔP .

Ayuda:

Forma de obtener los datos.

Mantenga tapada la boquilla con el dedo índice.

Destape la boquilla y espere que el líquido baje hasta pasar por la próxima marca de la regla. En ese momento dispare el cronómetro y registre el tiempo en que el líquido ha bajado entre dos marcas consecutivas. Por ejemplo cada centímetro.

Tape nuevamente la boquilla con el dedo.

Repita el procedimiento para las dos marcas siguientes.

Si, por ejemplo, usted mide el tiempo entre los 19 y 18 cm. El valor correspondiente a la altura media será 18.5 cm.

La próxima medida será entre los 17 y 16 cm., correspondiente a una altura media de 16.5cm.

Repita el procedimiento varias veces y obtenga un promedio de sus resultados medidas de la velocidad para cada altura registrada.

**VIII Olimpiada Boliviana de Física
Santa Cruz, 21 y 22 de Agosto 2003.**

PRUEBA EXPERIMENTAL POR DELEGACIONES.

SOLUCION.

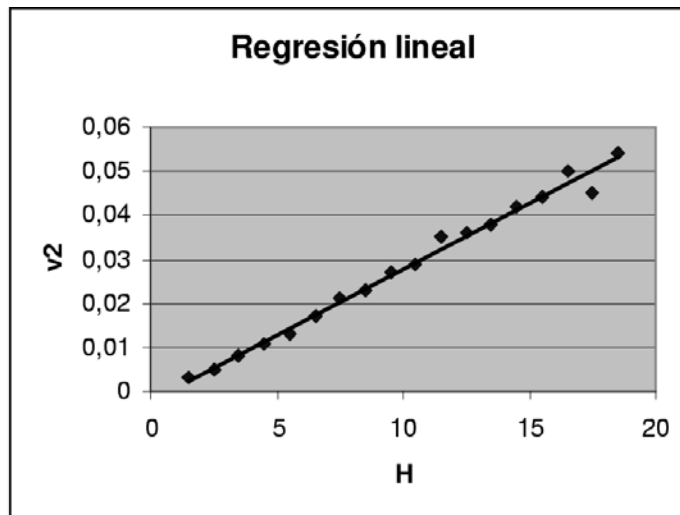
A continuación se muestran un ejemplo de resultados obtenidos sobre los promedios de cinco medidas para cada altura H .

V^2 [(cm/s) ²]	H [cm]	V^2 [(cm/s) ²]	H [cm]
0,054	18,5	0,027	9,5
0,045	17,5	0,023	8,5
0,050	16,6	0,021	7,5
0,044	15,5	0,017	6,5
0,042	14,5	0,013	5,5
0,038	13,5	0,011	4,5
0,036	12,5	0,008	3,5
0,035	11,5	0,005	2,5
0,029	10,5	0,003	1,5

El cuadrado de las velocidades se calcularon como:

$$v_i^2 = \left(\frac{1cm}{\bar{t}_i^2} \right)^2$$

La distancia fue de un cm. y $\bar{t}_i$ es el promedio del tiempo calculado sobre cinco medidas.



Resultados:

Pendiente:

$$k = 2.99 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2 \cong 0.003 \text{ cm/s}^2$$

Coefficiente de regresión:

$$r = 0.9945$$

Ajuste lineal:

$$V^2 = -2.04 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}^2 + 2.99 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2 H$$

Valor de h buscado:

$$\text{Para } V^2 = 0: \quad H = h = 0.68 \text{ cm}$$

Pérdida de presión:

$$\Delta P = \rho gh = 667.1 \text{ Din/cm}^2$$